



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo

CONRADO SEGALLA GUERRA

**Análise do Comportamento de Poços de
Grande Diâmetro sob Carregamento Dinâmico**

**Campinas
2017**

CONRADO SEGALLA GUERRA

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE POÇOS DE
GRANDE DIÂMETRO SOB CARREGAMENTO
DINÂMICO**

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura
e Urbanismo da Unicamp, para obtenção do
título de Mestre em Engenharia Civil, na
área de Estruturas e Geotécnica.

Orientador: Prof. Dr. Pêrsio Leister de Almeida Barros.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO
CONRADO SEGALLA GUERRA E ORIENTADA PELO PROF.
DR. PÉRSIO LEISTER DE ALMEIDA BARROS.

ASSINATURA DO ORIENTADOR



CAMPINAS

2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 134593/2015-4

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4097-5334>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Luciana Pietrosanto Milla - CRB 8/8129

G981a Guerra, Conrado Segalla, 1987-
Análise do comportamento de poços de grande diâmetro sob carregamento dinâmico / Conrado Segalla Guerra. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Pérsio Leister de Almeida Barros.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo.

1. Interação solo-estrutura. 2. Dinâmica do solo. 3. Método dos elementos finitos. 4. Métodos de elementos de contorno. I. Barros, Pérsio Leister de Almeida, 1957-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Analysis of the behavior of large diameter shafts under dynamic loading

Palavras-chave em inglês:

Soil-structure interaction

Soil dynamics

Finite element method

Boundary element methods

Área de concentração: Estruturas e Geotécnica

Titulação: Mestre em Engenharia Civil

Banca examinadora:

Pérsio Leister de Almeida Barros [Orientador]

Isaías Vizotto

João Batista de Paiva

Data de defesa: 24-08-2017

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Civil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL, ARQUITETURA E URBANISMO**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE POÇOS DE GRANDE
DIÂMETRO SOB CARREGAMENTO DINÂMICO**

Conrado Segalla Guerra

Dissertação de Mestrado aprovada pela Banca Examinadora, constituída por:

Prof. Dr. Pêrsio Leister de Almeida Barros
Presidente e Orientador
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. João Batista de Paiva
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Isaias Vizotto
Universidade Estadual de Campinas

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 24 de agosto de 2017

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas e entidades os que tornaram possível a execução deste trabalho. Em especial agradeço:

Ao meu orientador Prof. Dr. Pêrsio Leister de Almeida Barros, pela disponibilidade em ajudar, dedicação, paciência e amizade, que foram além do âmbito acadêmico.

À minha família pelo apoio incondicional em todos os momentos.

À FEC/Unicamp pela oportunidade, incluindo funcionários e professores que contribuíram para que este trabalho fosse possível.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

O trabalho propõe analisar o comportamento de poços de grande diâmetro revestidos sob o efeito de carregamentos dinâmicos, através de métodos numéricos para a discretização do solo e da estrutura. É utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF) na modelagem das paredes do revestimento do poço e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) na modelagem do solo circundante. Na modelagem da parede e da placa de fundo do poço são utilizados respectivamente elementos de casca cilíndrica e elementos de placa circular. Na modelagem do solo é utilizada uma formulação indireta do MEC que emprega soluções fundamentais de deslocamento e tensão causados por cargas dinâmicas distribuídas, aplicadas no interior de um semi-espaco elástico. É proposto um esquema de acoplamento entre os modelos do solo e da estrutura da parede do poço. Os carregamentos dinâmicos podem ser oriundos de forças aplicadas sobre a estrutura das paredes ou de excitação sísmica. A análise é feita no domínio da frequência considerando carregamentos dinâmicos harmônicos no tempo. São considerados apenas casos com simetria axial, tanto geométrica quanto para as cargas. Os resultados obtidos são comparados com análises feitas por outros pesquisadores para os casos de placa flexível apoiada na superfície e de estacas verticais sob carga axial. São apresentados resultados numéricos para deslocamentos e esforços na parede e placa de fundo do poço, para várias frequências de excitação.

Palavras-chave: dinâmica dos solos, interação solo-estrutura, elementos finitos, elementos de contorno

Abstract

This work analyses the behavior of large diameter lined shafts subjected to dynamic loads employing numerical method to the soil and structure discretization. The Finite Element Method (FEM) is used to model the lining structure and the Boundary Element Method is used to model the soil mass around the shaft. Cylindrical shell and circular plate elements are used to model the shaft lining wall and the base plate structures, respectively. An indirect BEM formulation which uses displacement and traction fundamental solutions for distributed loads applied in the interior of an elastic half space is used in the soil modeling. A scheme is proposed for the coupling between the structure and soil models. Dynamic loads directly applied to the shaft structure and seismic excitations are considered. Frequency domain analysis considering time-harmonic loads is executed. Only cases with axial symmetry for both geometry and loading are considered. The obtained results are compared with other researcher's analyses for the cases of plates resting on the surface of an elastic half space and for vertical piles under axial loads. Numerical results for displacements and internal forces along the shaft lining wall and base plate for different values of the excitation frequency.

Keywords: soil dynamics, soil-structure interaction, finite element, boundary element

Lista de ilustrações

Figura 1 – Poço da estação São Paulo-Morumbi do Metrô de São Paulo - Fonte: Companhia do Metropolitano de São Paulo.	19
Figura 2 – Modelo axissimétrico do poço.	20
Figura 3 – Elemento retangular: diretrizes e considerações para a formulação.	33
Figura 4 – Elementos selecionados no triângulo de Pascal	34
Figura 5 – Elemento de placa circular: graus de liberdade e dimensões.	38
Figura 6 – Elemento de casca cilíndrica: graus de liberdade e dimensões.	44
Figura 7 – Ilustração do MEC para o problema de uma cavidade no meio infinito.	48
Figura 8 – Casos de carga: disco de carga, anel de carga e cilindro de carga.	56
Figura 9 – Carregamento axissimétrico de uma função delta de Dirac na direção vertical.	56
Figura 10 – Carga qualquer na direção vertical e direção do vetor unitário.	57
Figura 11 – Carga vertical no interior do semi-espço.	60
Figura 12 – Disco de carga uniforme na direção vertical.	62
Figura 13 – Representação de uma estrutura flexível apoiada sobre o solo sujeita a um carregamento harmônico e diagrama de corpo livre do problema.	66
Figura 14 – Discretização do problema: elementos, nós da estrutura e nós do solo.	67
Figura 15 – Placa retangular apoiada sobre a superfície: discretização da placa (MEF), do solo (MEC) e acoplamento.	74
Figura 16 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme q	75
Figura 17 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme distribuído: deslocamento transversal ao longo do eixo de simetria.	75
Figura 18 – Coordenadas e distâncias entre os elementos i e j para o cálculo do recalque.	76
Figura 19 – Exemplo de placa quadrada apoiada sobre o solo adotado por Ribeiro e Paiva (2015).	78
Figura 20 – Deslocamento vertical do centro B da placa ao ponto A ($L = 12\text{m}$, $E_p = 9,7833 \times 10^{13} \text{N/m}^2$, $\nu_p = 0,3$, $t_p = 0,1\text{m}$, $q = 1 \text{N/m}^2$, $E_s = 2,6 \times 10^8 \text{N/m}^2$, $\nu_s = 0,3$).	79
Figura 21 – Placa perfeitamente rígida apoiada sobre o solo.	81
Figura 22 – Placa quadrada apoiada sobre um semi-espço elástico submetida a um carregamento uniforme estático.	82
Figura 23 – Disco de carga equivalente a um retângulo.	83
Figura 24 – Comparação com o trabalho de Savidis e Richter (1979) para deslocamento no centro da placa.	85
Figura 25 – Comparação com o trabalho de Savidis e Richter (1979) para deslocamento no canto da placa.	85

Figura 26 – Amplitudes para uma placa de espessura $t_p = 0,25$ m e diferentes valores de velocidade de onda de cisalhamento do solo c_s ($L_x = L_y = 5$ m, $\rho_p = 2500$ kg/m ³ , $E_p = 3 \cdot 10^{10}$ N/m ² , $\nu_p = 0,15$, $\rho_s = 2000$ kg/m ³ , $\nu_s = 0,33$).	87
Figura 27 – Amplitudes para diferentes valores de espessura t_p da placa e velocidade de onda de cisalhamento do solo $c_s = 200$ m/s ($L_x = L_y = 5$ m, $\rho_p = 2500$ kg/m ³ , $E_p = 3 \cdot 10^{10}$ N/m ² , $\nu_p = 0,15$, $\rho_s = 2000$ kg/m ³ , $\nu_s = 0,33$).	87
Figura 28 – Placa perfeitamente rígida: equilíbrio dinâmico.	88
Figura 29 – Modelagem do poço: nós dos elementos finitos, nós dos elementos de contorno, elementos da base e elementos da parede.	89
Figura 30 – Modelos de elementos finitos para a validação da formulação do MEF: placa circular, cilindro e poço.	91
Figura 31 – Deslocamento vertical da placa circular na direção radial ($r = 1$ m, $t_p = 0,1$ m, $E = 1000$ N/m ² , $\nu = 0,1$, 1 N/m ²).	92
Figura 32 – Deslocamento radial ao longo do eixo da parede do cilindro ($r = 100$ m, $h = 10$ m, $t_c = 0,1$ m, $E = 1000$ N/m ² , $\nu = 0,1$).	92
Figura 33 – Deslocamento vertical na base do poço ($r = 10$ m, $h = 10$ m, $t_p = 0,1$ m, $t_c = 0,1$ m, $E = 1000$ N/m ² , $\nu = 0,2$, $\rho = 20$ kg/m ³).	93
Figura 34 – Deslocamento radial da parede poço ($r = 10$ m, $h = 10$ m, $t_p = 0,1$ m, $t_c = 0,1$ m, $E = 1000$ N/m ² , $\nu = 0,2$, $\rho = 20$ kg/m ³).	93
Figura 35 – Diretrizes do problema auxiliar para a determinação das cargas fictícias.	95
Figura 36 – Comportamento do poço como estaca ($h \gg r$) e como placa circular ($h \rightarrow 0$).	101
Figura 37 – Parte real dos deslocamentos verticais da placa circular apoiada sobre o solo ($K_r = 0,5$).	101
Figura 38 – Parte imaginária dos deslocamentos verticais da placa circular apoiada sobre o solo ($K_r = 0,5$).	102
Figura 39 – Exemplo de estaca submetida a um carregamento axial estático.	103
Figura 40 – Deslocamento vertical de uma estaca em um solo isotrópico ($P = 726,4$ kN, $l_p = 6,096$ m, $d_e = 0,6096$ m, $E_e = 2,1111 \times 10^7$ kN/m ² , $\nu_e = 0,2$, $E_s = 2,1111 \times 10^5$ kN/m ² , $\nu_s = 0,2$).	103
Figura 41 – Parte real da impedância vertical de uma estaca em um solo isotrópico ($E_p/E_s = 1000$, $l_p/a_e = 50$, $\rho_e/\rho_s = 1,5$, $\nu_s = 0,25$).	105
Figura 42 – Parte imaginária da impedância vertical de uma estaca em um solo isotrópico ($E_p/E_s = 1000$, $l_p/a_e = 50$, $\rho_e/\rho_s = 1,5$, $\nu_s = 0,25$).	105
Figura 43 – Casos de carga analisados para o poço.	106
Figura 44 – Deslocamento vertical no topo do poço devido a uma carga anelar radial.	113
Figura 45 – Deslocamento vertical no centro da base do poço devido a uma carga anelar radial.	115
Figura 46 – Deslocamento vertical no topo do poço devido a uma onda P.	116
Figura 47 – Deslocamento vertical no topo do poço devido a uma carga anelar radial.	117
Figura 48 – Momentos causados devido à uma onda P.	118

Figura 49 – Exemplo de poço para a montagem das matrizes $[A]$ e $[D]$: nós, elementos e graus de liberdade	146
Figura 50 – Diretrizes para o preenchimento da matriz $[A]$ referentes ao elemento anular (placa circular) da base	147
Figura 51 – Diretrizes para o preenchimento da matriz $[D]$ referentes ao elemento anular (placa circular) da base	149

Lista de tabelas

Tabela 1	– Tamanho das matrizes e vetores do sistema acoplado global para um problema em duas dimensões.	71
Tabela 2	– Deslocamento no centro e no canto da placa para diferentes malhas.	79
Tabela 3	– Frequências naturais para a modelagem do poço em elementos finitos para um apoio simples no centro da base e para apoio na borda da base	94
Tabela 4	– Comparação de impedâncias K_{vv} para diferentes valores de a_0 ($E_p/E_s = 1000$, $l_p/a_e = 10$, $\rho_e/\rho_s = 1$, $v_s = 0,25$).	104
Tabela 5	– Relações entre os parâmetros do poço e do solo considerados nas análises. . .	112
Tabela 6	– Deslocamento vertical no topo e na base do poço para diferentes malhas. . .	114
Tabela 7	– Matriz $[A]$	148
Tabela 8	– Matriz $[D]$	152

Lista de símbolos

A	área da seção transversal
$[A]$	matriz de transferência
A_i	amplitude de onda
a	raio do elemento de casca cilíndrica
$\{a\}$	vetor de constantes da função aproximadora
a_0	frequência adimensional
a_e	raio da estaca
B_i	amplitude de onda
B_z	fator de massa
b_{2i}	coeficiente relativo à frequência, número de onda e constantes elásticas
b_{3i}	coeficiente relativo à frequência, número de onda e constantes elásticas
C	contorno do domínio real
$[C]$	matriz coordenada de nós
C'	contorno do domínio auxiliar
c_{ij}	constante elástica
c_p	onda de compressão
c_s	onda de cisalhamento
D	rigidez de placa e casca
$[D]$	matriz de transferência
$[D_m]$	matriz relativa à rigidez da placa
$\{d\}$	vetor de deslocamentos e rotações para qualquer coordenada do elemento retangular
$\{d_{no}\}$	vetor de deslocamentos e rotações nodais do elemento de placa circular
E	módulo de elasticidade

e	deformação volumétrica
$\{F\}$	vetor de forças equivalentes
F_i	força de corpo na direção i
$[G]$	matriz de coeficientes de curvatura
G_{ij}	funções de Green para deslocamentos
\overline{G}_{ij}	funções de Green para deslocamentos transformadas
$\{g\}$	vetor componente das funções de forma do elemento de placa circular
H	altura do poço
h	distância vertical variável a partir da superfície
J_m	função de Bessel de ordem m
$[K]$	matriz de rigidez
K_r	rigidez relativa de placa circular
K_{vv}	impedância vertical
l	comprimento do elemento
l_p	comprimento estaca
$[M]$	matriz de massa
$\{M\}$	vetor de momentos para elemento retangular
$[N]$	matriz das funções de forma
$\{N\}$	vetor função de forma
$\{n\}$	vetor normal
n_e	número de elementos
n_{eb}	número de elementos da base
n_{ep}	número de elementos da parede
n_g	número global de graus de liberdade perfeitamente
n_{gdl}	número de graus de liberdade
n_n	número de nós

n_{nb}	número de nós da base
n_{np}	número de nós da parede
P	carga aplicada
$\{P_0\}$	vetor de forças e momentos nodais
$\{P_{ap}\}$	vetor de forças e momentos nodais no elementos retangular
$\{p\}$	vetor de coordenadas do elemento retangular
p_i	carga aplicada na direção i
\bar{p}_i	carga aplicada na direção i transformada
$\{Q\}$	vetor de cargas fictícias
Q_i	carga fictícia na direção i
q	carga distribuída
$\{q\}$	vetor de carregamento distribuído
R	raio do poço
$\{R_0\}$	vetor de reação do solo
r	coordenada na direção r
S	área da placa
$\{S\}$	vetor da área de cada elemento
s	distância radial da função delta de Dirac
$[T]$	matriz das funções de influência de tensão
T_{ij}	função de influência de tensão
t	tempo
t_i	tensão na direção i
$\{t\}$	vetor de tensões
$t^{(inc)}$	tensão incidente
$t^{(sc)}$	tensão dispersada
t_c	espessura da casca ou do cilindro ou da parede

t_p	espessura da placa ou da base
$[U]$	matriz das funções de influência de tensão
U_{ij}	função de influência de deslocamento
$\{u\}$	vetor de deslocamentos
$u^{(inc)}$	deslocamento incidente
$u^{(sc)}$	deslocamento dispersado
u_i	deslocamento na direção i
\bar{u}_i	deslocamento na direção i transformado
$\{u_{no}\}$	vetor de deslocamentos e rotações nodais no elemento retangular
u_0	deslocamento inicial
V_e	fator de magnificação no canto da placa retangular
V_m	fator de magnificação no centro da placa retangular
v_0	velocidade inicial
w	deslocamento vertical
$\{w_0\}$	vetor de deslocamentos e rotações nodais
w_{co}	deslocamento no centro do elemento retangular
w_r	deslocamento para estrutura perfeitamente rígida no caso estático
w_{rd}	deslocamento para estrutura perfeitamente rígida no caso dinâmico
α	constante elástica adimensional
α_0	aceleração inicial
α_f	fator de forma
β	constante elástica adimensional
β_a	rigidez relativa de placa quadrada no caso estático
γ	constante elastica adimensional
$[\gamma]$	matriz componente das funções de forma do elemento de placa circular
γ_a	rigidez relativa de placa quadrada no caso dinâmico

Δ	raiz da equação característica
δ	frequência normalizada
δ_w	função ponderadora
ε_{ij}	tensor de deformações
ζ	numero de onda adimensional
θ_i	rotação na direção i
κ	constante elástica adimensional
κ_i	curvatura na direção i
λ	constante de Lamé
λ_o	número de onda
μ	constante de Lamé
ν	coeficiente de Poisson
ξ	raiz da equação característica
ρ	massa específica
ρ_v	recalque vertical
ρ_i	coeficiente relativo à frequência e constantes elásticas
σ_{ij}	tensor de tensões
$\bar{\sigma}_{ij}$	tensor de tensão transformado
σ_{ijk}	funções de Green para tensões s
$\bar{\sigma}_{ijk}$	funções de Green para tensões transformadas
Φ	equação
φ_i	função de forma do elemento de placa circular
ω	frequência circular

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	22
3	TENSÕES E DEFORMAÇÕES	29
3.1	Coordenadas Cartesianas	29
3.2	Coordenadas Cilíndricas	31
4	ELEMENTOS FINITOS	33
4.1	Elemento Retangular	33
4.2	Elemento de Placa Circular	38
4.3	Elemento de Casca Cilíndrica	43
5	ELEMENTOS DE CONTORNO	46
5.1	Método dos Elementos de Contorno - Forma Indireta	46
5.2	Funções de Green	50
5.3	Funções de Influência	61
6	ACOPLAMENTO MEF-MEC	65
6.1	Elementos Finitos	65
6.2	Elementos de Contorno	68
6.3	Sistema Global	70
7	APLICAÇÕES	73
7.1	Placa Retangular sob Carregamento Estático	73
7.2	Placa Retangular sob Carregamento Dinâmico	82
7.3	Poços de Grande Diâmetro	89
7.3.1	Elementos Finitos	90
7.3.2	Elementos de Contorno	94
7.3.3	Acoplamento	99
7.3.4	Validação	100
7.3.5	Casos de Carga	104
7.3.6	Resultados	111
8	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	119
	REFERÊNCIAS	121

APÊNDICES	129
APÊNDICE A – MATRIZES DE RIGIDEZ E DE MASSA DOS ELEMENTOS FINITOS	130
APÊNDICE B – MONTAGEM DAS MATRIZES A E D	145

1 Introdução

Os poços de grande diâmetro são estruturas, frequentemente com seção circular, construídas a partir do nível da superfície em direção a uma profundidade específica e são empregados em muitos ramos da engenharia, principalmente em obras de metrô, como estações e saídas de emergência (figura 1) e em usinas de geração de energia como espaço subterrâneo ou até mesmo como reservatório, entre outras aplicações. A utilização desta técnica de escavação é relativamente nova já que é baseada no método NATM (New Austrian Tunnelling Method) de construção de túneis, um método que utiliza o próprio maciço como parte integrante da estrutura, considerando-se, assim, a interação solo-estrutura. Algumas técnicas alternativas de escavação de poços de grande diâmetro, como estacas justapostas e paredes diafragmas, também têm sido utilizadas, porém, geralmente são mais onerosas, já que a espessura final do revestimento e a armadura empregada costumam ter dimensões maiores.

Alguns trabalhos científicos de análise do comportamento de estruturas subterrâneas foram realizados recentemente, contudo, a ausência, no Brasil, de agentes naturais causadores de grandes vibrações, como abalos sísmicos, faz com que a maioria das pesquisas relacionadas à obras subterrâneas sejam voltadas para análise de carregamentos estáticos, enquanto que a análise dinâmica muitas vezes é negligenciada e portanto tem-se uma literatura pouco desenvolvida no país. Todavia, principalmente em grandes centros urbanos, as vibrações derivadas de máquinas e veículos podem ser um empecilho, e seus efeitos podem levar, em casos extremos, à ruptura da estrutura.



Figura 1 – Poço da estação São Paulo-Morumbi do Metrô de São Paulo - Fonte: Companhia do Metropolitano de São Paulo.

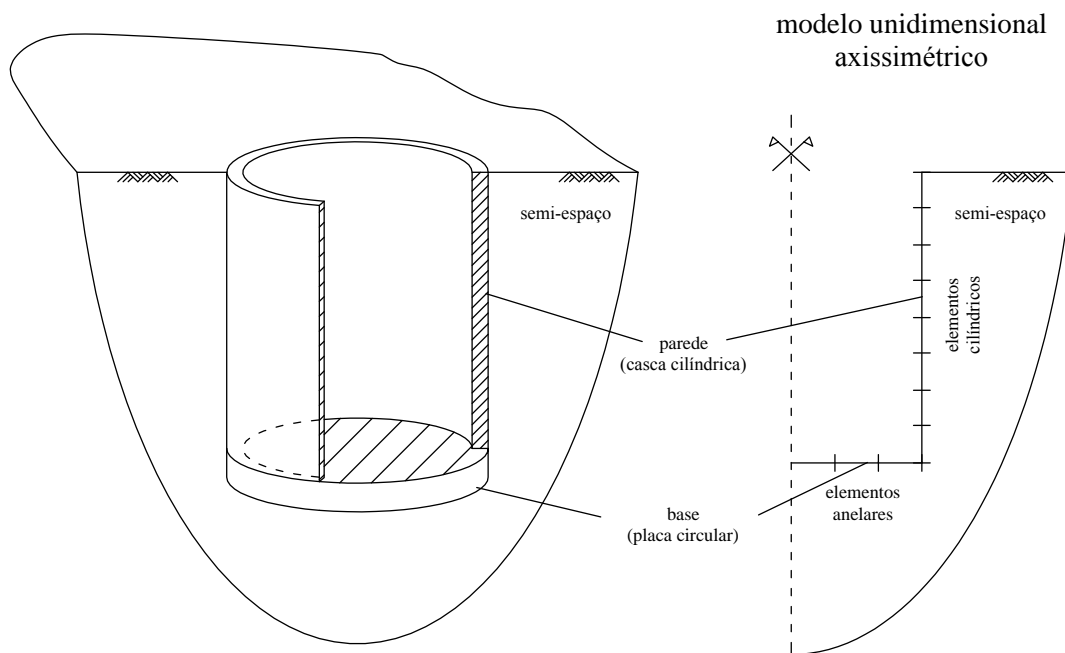


Figura 2 – Modelo axissimétrico do poço.

O presente trabalho visa analisar o comportamento de poços de grande diâmetro sob o efeito de carregamentos dinâmicos, através de métodos numéricos com a discretização do solo e da estrutura, já que, devido à complexidade de caracterização do solo, bem como do comportamento mecânico das estruturas devido à ação dinâmica, opta-se por uma modelagem numérica e não um modelo analítico.

A rápida evolução do potencial dos computadores, permite a utilização de modelos numéricos computacionais cada vez mais sofisticados, dando preferência aos mesmos em detrimento de modelos analíticos, que, apesar de ainda terem grande utilidade, muitas vezes sofrem muitas simplificações e em alguns casos não representam o comportamento real de uma estrutura. Dessa forma, opta-se neste trabalho pelo desenvolvimento de uma ferramenta numérica que se aproxime o máximo possível da realidade.

Neste trabalho são analisados poços de grande diâmetro de seção circular revestidos tanto ao longo da face lateral quanto no fundo com uma estrutura de espessura pequena quando comparada às dimensões do poço. Tanto a estrutura de revestimento quanto o solo circundante são assumidos como elásticos-lineares. As cargas dinâmicas aplicadas são harmônicas no tempo e a análise é feita no domínio da frequência. Tanto a geometria do poço quanto a distribuição dos carregamentos apresentam simetria axial em relação ao eixo do poço. Na figura 2 está mostrado um esquema do problema considerado com os elementos que constituem um poço.

O objetivo principal deste trabalho é analisar o desenvolvimento de tensões, esforços solicitantes, deformações e deslocamentos de poços de grande diâmetro quando submetidos a um carregamento dinâmico, tendo em vista o dimensionamento da estrutura de revestimento

dos poços, que geralmente é em concreto armado. Para tanto, dois métodos numéricos são utilizados em conjunto: o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). A análise dinâmica é feita no domínio da frequência.

A estrutura do poço é modelada a partir do método dos elementos finitos, enquanto que o solo é discretizado através do Método dos Elementos de Contorno e em ambos os casos considera-se os materiais em regime elástico-linear. A partir da compatibilidade de deslocamentos e equações de equilíbrio, é possível o acoplamento entre os métodos. A consideração da interação solo-estrutura através do acoplamento MEF-MEC alcança resultados mais precisos, pois extraem-se as vantagens que os métodos oferecem e minimizam-se as desvantagens.

Ressalta-se também que a modelagem é feita em duas dimensões e faz-se a análise axissimétrica para simular o efeito em três dimensões, desse modo, é possível, através de um modelo menos rebuscado e que demanda um gasto computacional menor, atingir um resultado satisfatório e coerente do comportamento da estrutura, porém com algumas limitações quanto a efeitos que só poderiam ser analisados por meio de modelos tridimensionais.

Um código computacional é desenvolvido com base nos métodos numéricos utilizados e das hipóteses assumidas. O programa permite a análise do comportamento de poços para carregamentos dinâmicos com diferentes frequências e diferentes dimensões da estrutura, desde que os poços analisados sejam circulares e não assumam formas diferentes, como por exemplo poços com seções elípticas. O mesmo procedimento é implementado para exemplos mais simples de engenharia que servem de base e validação do método empregado para o modelo do poço. No caso, toma-se como exemplo: placas retangulares e circulares apoiadas sobre o solo sob carregamento dinâmico, além do caso de estacas com seções circulares sob o efeito de cargas dinâmicas axiais, que representam principalmente o caso de fundações de máquinas.

Para análise dos efeitos causados por cargas dinâmicas, aplica-se, inicialmente, carregamentos harmônicos simplificados, em seguida, através da sobreposição de efeitos, simulam-se carregamentos mais complexos, como sismos. A sobreposição de efeitos é válida, pois sabe-se que os materiais que compõem o meio em que o carregamento é aplicado são do tipo elástico-linear.

Obtém-se o resultado para diversas dimensões do poço e os casos de carga considerados são para carregamentos axissimétricos como uma carga radial ao longo do poço, simulando as vibrações oriundas da superfície e também ondas sísmicas de compressão na direção vertical.

2 Revisão Bibliográfica

O estudo de interação dinâmica solo-estrutura é de grande interesse da engenharia. Geralmente os casos analisados não são triviais, podendo atingir níveis de complexidade os quais não podem ser representados por modelos analíticos. Logo, depara-se na literatura com assuntos isolados, tomando assim como referência temas que diferem quanto ao objetivo central desta dissertação. É possível encontrar trabalhos que tratam de métodos construtivos e análise estática de poços como em [Prater \(1977\)](#), o qual apresenta teorias para determinar o carregamento na parede de poços e resultados a partir do método da cunha de ruptura de Coulomb.

[Gomes \(2008\)](#) faz um estudo de caso de um poço no metrô do Porto que apresenta geometria elíptica, onde é exposto a fenomenologia do comportamento desse tipo de estrutura. Uma análise numérica através do Método dos Elementos Finitos é feita, bem como ensaios com o solo da região escavada. Em [Liu, Wang e Zhang \(2009\)](#), é proposto um método de cálculo do empuxo ativo axissimétrico através do método de superfície de escorregamento. [Tobar e Meguid \(2010\)](#) realizam um estudo experimental para se determinar o empuxo em poços cilíndricos escavados em areia seca, cujos resultados são então comparados a métodos teóricos analíticos, dos quais o que mais se aproximou dos resultados experimentais foi o modelo analítico de [Cheng e Hu \(2005\)](#).

Outro trabalho baseado em métodos experimentais é desenvolvido por [Cho et al. \(2015\)](#). Neste os resultados experimentais são comparados a modelos numéricos em elementos finitos axissimétricos, considerando o efeito do arqueamento. [Bernardes \(2010\)](#) dá sequência ao trabalho de [Gomes \(2008\)](#), mostrando particularidades associadas a escavação sequencial de poços de grande diâmetro através de modelos numéricos e medições em obra. O estudo de [Dias \(2011\)](#), baseado também em investigações de [Gomes \(2008\)](#), analisa o comportamento hidromecânico de escavações sequenciais na direção vertical em condições não saturadas. Para tanto, utiliza o Método dos Elementos Finitos para as análises.

Um estudo de caso de escavação sequencial de um poço pode ser encontrado em [Adrego \(2014\)](#), que consiste na análise numérica de um poço circular escavado na argila de Londres. Neste, são apresentadas características deste tipo de solo bem como técnicas de escavação de poços, seus aspectos críticos e aplicação de concreto projetado como revestimento. Em [Cecilio et al. \(2010\)](#) é relatado o projeto executivo dos poços que compõem a estação Vila Prudente do metrô de São Paulo. As características geométricas da região são apresentadas e a partir delas é feita uma análise numérica tridimensional para descrever o comportamento e efeitos da obra.

Um estudo que tem como foco a avaliação de revestimento, principalmente utilizando concreto projetado, é dado em [Dias \(2013\)](#). O trabalho visa avaliar os esforços e deslocamentos na parede de poços escavados em diferentes condições geotécnicas através de modelos

numéricos 3D, considerando as diferentes etapas de escavação. [Cortizo \(2015\)](#) apresenta métodos analíticos para o cálculo das tensões na parede de um poço para tipos diferentes de solo. Comparam-se os resultados dos métodos analíticos a dois métodos numéricos, um baseado no Método das Diferenças Finitas e outro baseado no modelo de mola de Winkler. O trabalho apresenta também um breve histórico mostrando a evolução dos métodos de escavação, desde os primórdios até chegar à técnica dos poços de grande diâmetro.

A análise dinâmica de estruturas enterradas ou apoiadas sobre o solo começa a ganhar popularidade a partir dos estudos de [Lamb \(1904\)](#). O trabalho consiste em estudar as vibrações em um meio elástico linear semi-infinito causadas por uma carga pontual dinâmica, considerado um caso de “Boussinesq dinâmico”. Já [Reissner \(1936\)](#) avalia o problema de vibrações de placa circular infinitamente flexível apoiada sobre um meio elástico uniformemente carregada. A solução resulta da integração da solução [Lamb \(1904\)](#) para carga pontual. Este trabalho dá uma grande contribuição ao revelar a existência do amortecimento geométrico no solo, um fenômeno de dissipação de energia até então pouco conhecido.

[Quinlan \(1954\)](#) e [Sung \(1954\)](#) analisam o comportamento de fundações circulares rígidas e flexíveis para três diferentes tipos de distribuição de reação do solo, sendo a primeira uniforme, a segunda parabólica nula na borda e máxima no centro e a terceira parabólica mínima no centro e infinita na borda. Durante a segunda metade do século 20 muitos trabalhos são desenvolvidos considerando excitações não periódicas como sismos. Pode-se observar essa tendência nos trabalhos de [Hatanaka \(1955\)](#) e [Chopra et al. \(1969\)](#), que analisam o efeito sísmico em barragens de terra, o último através dos elementos finitos. Em [Okamoto e Tamura \(1972\)](#), o comportamento sísmico em túneis é observado através de modelos experimentais em laboratório e por meio deles é formulado um modelo matemático. Uma revisão detalhada da resposta ao sismo e projeto de estruturas tubulares enterradas em geral, como túneis, dutos de água, esgoto, óleo, entre outros, é feita em [Ariman e Muleski \(1981\)](#).

Os processos para se determinar o efeito sísmico em estruturas enterradas são geralmente baseados na hipótese de propagação de ondas em meios elásticos. As ondas podem ser classificadas como: ondas de corpo ou volume e ondas de superfície. As ondas de corpo se propagam no interior do meio e dividem-se em ondas de pressão (ondas P) ou primárias e ondas de cisalhamento ou secundárias (ondas S). Nas ondas de pressão, o movimento das partículas é paralelo à direção de propagação, gerando assim deformações de compressão e tração, já em ondas de cisalhamento, o movimento é perpendicular a direção de propagação.

Ondas superficiais são aquelas que se propagam na região próxima à superfície, dividem-se em ondas Love (onda L) e ondas Rayleigh (ondas R). Durante a passagem de uma onda L as partículas se movem ao longo de uma linha horizontal perpendicular a direção de propagação e foram tratadas no trabalho de [Love \(1911\)](#). No trabalho de [Rayleigh \(1885\)](#) é investigado o comportamento de ondas em uma superfície plana, infinita, homogênea, isotrópica e elástica, com espessura comparada ao comprimento de onda. A característica deste tipo de onda é um movimento retrógrado elíptico em um plano vertical com a componente horizontal sendo paralela a direção de propagação.

Um método simplificado para previsão da deformação no solo causada por uma onda sísmica é dado em [Newmark \(1968\)](#) assim como no estudo de [Scanlan \(1976\)](#). Os efeitos de ondas sísmicas na interação solo-estrutura são simulados através de uma fundação rígida, suportada pelo solo, utilizando-se o modelo de Winkler, o qual é representado por “molas” equivalentes. Em [Gómez-Massó et al. \(1983\)](#) estuda-se a interação solo-estrutura a partir da superposição dos efeitos de ondas S, ondas P e ondas R. Para tanto utiliza-se elementos finitos viscoelásticos, simulando-se dessa forma uma excitação sísmica arbitrária e uma aproximação do efeito 3D.

Casos históricos de danos em estruturas enterradas causados por abalos sísmicos podem ser encontrados em [Lanzano, Bilotta e Russo \(2008\)](#) e [Hashash et al. \(2001\)](#), que apresentam diretrizes e variáveis a serem consideradas no dimensionamento de estruturas enterradas sobre a ação de sismos. Vibrações excessivas causadas por trens urbanos que afetam edificações lindeiras são estudadas em [Carvalho \(2015\)](#), no qual faz-se uma simulação numérica para o estudo do comportamento dinâmico em vias permanentes, de forma a mitigar os efeitos vibratórios transmitidos ao solo.

Os estudos mais recentes de interação dinâmica solo-estrutura são baseados principalmente em métodos numéricos de acordo com avanço e evolução do processamento computacional. Os métodos numéricos utilizados neste trabalho são basicamente dois: Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEF é uma técnica mais difundida para a solução de problemas complexos de engenharia, e basicamente, consiste em uma aproximação numérica dos fenômenos de um meio contínuo, descritos por equações diferenciais em um certo domínio, por elementos de dimensões reduzidas que são agrupados em uma malha. Através da imposição de condições de continuidade e equilíbrio entre os elementos obtém-se uma solução aproximada do problema.

O MEC vem se destacando como uma alternativa ao MEF para certas aplicações, principalmente para aquelas que envolvem domínio infinito, pois neste caso o MEF se torna dispendioso e impreciso, uma vez que demanda adaptações e simplificações, além de que pode gerar efeitos de borda indesejados em análises dinâmicas. O MEC, por sua vez, possui formulação própria para meios infinitos e semi-infinitos, além de reduzir a complexidade dos casos a serem estudados. Por exemplo, um problema em duas dimensões, é reduzido a uma linha unidimensional de contorno onde somente o domínio é discretizado.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) possui como vantagens a flexibilidade no tratamento da heterogeneidade do material, da não-linearidade e deformabilidade do material, de condições de contorno diversas e de geometrias complexas. Destacam-se quatro trabalhos pioneiros para o desenvolvimento do método, são eles: [Courant \(1943\)](#), [Argyris e Kelsey \(1960\)](#), [Turner et al. \(1956\)](#) e [Zienkiewicz e Cheung \(1956\)](#). [Courant \(1943\)](#) desenvolve a ideia de minimização de um funcional usando aproximações lineares em subdomínios conectados. Em [Argyris e Kelsey \(1960\)](#) desenvolvem-se teoremas de energia aplicados a análise estrutural, analisando as relações de tensão e deformação, o que leva ao conceito de rigidez e flexibilidade.

O trabalho de [Turner et al. \(1956\)](#) desenvolve a matriz rigidez de um elemento de

treliça em coordenadas globais e também de um elemento triangular de tensão e deformação no plano do elemento. A extensão a outros problemas de engenharia através da minimização da energia potencial é feita em [Zienkiewicz e Cheung \(1956\)](#). Problemas de propagação de ondas e de interação solo-estrutura podem ser analisados a partir do MEF, como em [Smith \(1975\)](#) que utiliza elementos quadriláteros bi-dimensionais para análise de propagação de ondas sísmicas de corpo. Tenta-se atenuar os efeitos de borda através da introdução de bordas fictícias para que não haja reflexão de ondas. Toma-se também o cuidado de escolher o tamanho dos elementos de acordo com o comprimento de onda. Os resultados são comparados então à modelos baseados no método das diferenças finitas.

[Costantino, Miller e Lufrano \(1976\)](#) apresenta modelos em elementos finitos para determinar parâmetros de interação solo-estrutura dependentes da frequência. Para tanto, realizam-se testes variando a malha de elementos, o tamanho dos elementos, condições de contorno e a taxa de amortecimento do solo. Há também um tratamento no contorno para evitar problemas de reflexão de ondas e possibilitar a convergência dos modelos. A comparação entre modelos em elementos finitos e modelos simplificados mais conservadores de estruturas enterradas é elaborada em [Gómez-Massó e Attalla \(1984\)](#), no qual a excitação sísmica é uma combinação de ondas P e ondas S e a propagação se dá em um semi-espaco viscoelástico.

[Liao e Wong \(1984\)](#) e [Werkle \(1986\)](#) fazem o tratamento dos problemas de reflexão de onda nos contornos a partir de um método chamado de elemento de transmissão. Esta técnica consiste em assumir que ondas P, ondas S e ondas R colidem no contorno com um certo ângulo. O elemento considerado contém um amortecedor viscoso. O ângulo de incidência é desconhecido, logo o método é uma aproximação e requer um gasto computacional considerável. Outro tratamento para modelos que simulam interação dinâmica solo-estrutura pode ser encontrado em [Lopes \(2003\)](#). Neste trabalho os problemas de borda são tratados a partir do modelo de elementos infinitos estudado em [Bettess \(1977\)](#) e [Bettess \(1980\)](#).

Os problemas de reflexão de ondas podem ser melhor tratados utilizando métodos que considerem um domínio infinito, como por exemplo o método dos elementos de contorno (MEC), o qual é baseado em soluções singulares (funções de Green). O MEC se adequa bem a problemas físicos com domínios infinitos ou semi-infinitos. O método induz um número relativamente pequeno de incógnitas quando comparado ao MEF, já que somente o contorno do domínio é discretizado.

A origem do método se encontra na teoria de equações integrais de [Fredholm \(1905\)](#) para problemas de elasticidade e mais tarde desenvolvida por pesquisadores da área como em [Mikhlin \(1957\)](#). As soluções satisfazem qualquer espaço dentro do domínio. Não há necessidade de sub-divisão do domínio em elementos, desde que as funções escolhidas atendam a equação diferencial de equilíbrio, porém aproximando as condições de contorno e procurando minimizá-las através de integrais no contorno. As integrais são numericamente calculadas subdividindo-se o contorno em elementos nos quais as incógnitas são aproximados utilizando funções interpoladoras. A desvantagem do MEC é que as soluções fundamentais dos problemas são singulares e requerem atenção especial quando integradas sobre o contorno.

Basicamente duas variantes são empregadas para o desenvolvimento do método dos elementos de contorno, o método indireto, com uma abordagem física mais intuitiva, e o método direto, baseado mais em um tratamento matemático da teoria de potencial. Conforme [Athanasiadis \(1985\)](#), no método indireto, se reúnem as equações integrais que apresentam as condições de contorno do problema considerado. Essas equações podem ser derivadas através da adição de uma distribuição de cargas singulares fictícias em um plano infinito ao longo de um contorno definido de acordo com o problema físico.

Diferentes abordagens do método indireto são encontradas na literatura, como em [Salamon \(1964\)](#), no qual aplica-se o método a problemas de escavações voltadas para mineração considerando-se materiais elásticos. [Plewman, Deist e Ortlepp \(1969\)](#) também têm como foco problemas em mineração e descrevem como podem-se determinar deslocamentos e tensões em qualquer ponto do problema analisado, recorrendo a funções de Green para um semi-espço infinito. A aplicação do método a placas delgadas elásticas é encontrada em [Jawson e Maiti \(1968\)](#). Em [Crouch e Starfield \(1983\)](#) é dado o desenvolvimento para mecânica dos sólidos em geral.

O método direto adota como função desconhecida a função procurada no contorno ou suas derivadas. Essas funções são geralmente originárias de relações matemáticas de teoria de potencial. A solução das equações integrais obtidas fornecem os valores da função desconhecida diretamente. Os valores da função dentro do domínio podem ser calculados a partir das condições de contorno.

Os primeiros trabalhos aplicados à elasticidade estática empregando o método direto podem ser encontrados em [Rizzo \(1967\)](#) e [Cruse \(1969\)](#), que desenvolve a formulação para o caso tridimensional. [Bezine \(1981\)](#) estende o tema de flexão de placas para casos gerais de condições de contorno. As equações integrais de contorno são abordadas por [Brebbia e Dominguez \(1977\)](#) no qual adota-se o termo método dos elementos de contorno e introduz-se também a técnica de resíduos ponderados junto ao MEC.

Emprega-se o MEC em diversos problemas de dinâmica dos solos justamente por conseguir simular domínios infinitos e semi-inifinitos. O método direto juntamente com a transformada de Laplace são aplicados em [Cruse e Rizzo \(1968\)](#) para a solução de problemas elasto-dinâmicos lineares, como a propagação de ondas e concentração de tensões. [Manolis e Beskos \(1981\)](#) produzem um trabalho similar ao estudarem a concentração de tensões em problemas dinâmicos, no qual consideram dois tipos de materiais: elástico linear e viscoelástico.

A formulação do MEC para problemas de propagação de ondas escalares transientes é dada no domínio do tempo por [Mansur e Brebbia \(1982\)](#). Compara-se, então, o resultado numérico de elementos em uma dimensão e duas dimensões a resultados analíticos conhecidos. Um estudo relacionado ao último citado pode ser encontrado em [Antes \(1985\)](#), onde também consta a solução das equações integrais utilizando o processo de passo de tempo, assim como em [Spyrakos e Antes \(1986\)](#), que utiliza o método para problemas no estado plano de deformações e no estado plano de tensões.

Apresenta-se o comportamento de fundações de superfície rígidas apoiadas em um

semi-espaco elástico, linear, homogêneo e isotrópico, sujeitas a ondas sísmicas e forças dinâmicas externas em [Karabalis e Beskos \(1984\)](#). Mais tarde em [Karabalis e Beskos \(1985\)](#) é apresentado uma análise similar para fundações flexíveis apoiadas sobre o semi-espaco através de um modelo híbrido MEC-MEF no domínio do tempo. Outro estudo para fundações de superfície, desta vez imersas no semi-espaco utilizando o acoplamento MEC-MEF no domínio do tempo, é feito em [Karabalis e Beskos \(1986\)](#). [Dominguez e Roesset \(1978\)](#) aplica o MEC em conjunto do MEF para a análise de fundações imersas no semi-espaco em duas e três dimensões no domínio da frequência.

Atualmente modelos híbridos que apresentam em sua formulação diferentes técnicas numéricas de análise estão amplamente difundidos e se baseiam em modelos cada vez mais sofisticados. Diversos trabalhos de aplicação em interação dinâmica solo-estrutura podem ser encontrados na literatura, entre eles destaca-se o trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#), no qual placas retangulares flexíveis e rígidas apoiadas sobre um semi-espaco elástico linear são analisadas para uma carga dinâmica concentrada no centro da placa e para um carregamento distribuído.

Emprega-se o MEF para modelar a placa e funções de Green para reproduzir o meio elástico que suporta a estrutura. Uma formulação utilizando o acoplamento MEC-MEF no domínio do tempo é proposta por [Estorff e Kausel \(1989\)](#), onde aplica-se o método a três problemas de interação solo-estrutura submetidos a cargas impulsivas: fundações superficiais apoiadas sobre o meio elástico, trincheiras abertas e preenchidas e túneis retangulares com o carregamento dinâmico aplicado sobre a superfície.

O solo representado por um meio elástico porém com diferentes camadas é apresentado no trabalho de [Romanel \(1989\)](#), o qual utiliza um método híbrido para o desenvolvimento da solução no domínio da frequência. A estrutura é discretizada a partir do MEF e o meio elástico pelo MEC, são elaborados então alguns modelos numéricos para a validação da formulação. [Almeida \(2003\)](#) e [Almeida e Coda \(2005\)](#) desenvolvem um código computacional que faz a análise da interação solo-estrutura através do acoplamento MEC-MEF no domínio do tempo para túneis, radiers e reservatórios enterrados. O solo é tratado como um meio elasto-plástico infinito, onde emprega-se a solução fundamental de Kelvin para a região plastificada e a solução fundamental de Stokes para a região não-plastificada. Já para representar a estrutura recorre-se ao MEF.

Questões relacionadas à anisotropia do solo são tratadas em [Barros \(1997\)](#). Neste trabalho o solo é considerado um meio elástico transversalmente isotrópico e apresenta-se a dedução das funções de Green e funções de influência aplicadas a casos de cargas dinâmicas na superfície e no interior do meio semi-infinito. Apresenta-se também a formulação dos elementos de contorno utilizando o método direto e o indireto, compara-se então os resultados para um caso de carga harmônica simples aos resultados obtidos através das funções de Green e de influência. Fundações rígidas apoiadas na superfície, parcialmente imersas e totalmente imersas no meio elástico transversalmente isotrópico também são analisadas.

Mais recentemente em [Barros \(2006\)](#) é estudada a resposta dinâmica de fundações

cilíndricas rígidas, imersas em um semi-espaco transversalmente isotrópico. [Amiri-Hezaveh et al. \(2013\)](#) analisam o comportamento dinâmico de fundações retangulares rígidas na superfície de um semi-espaco transversalmente isotrópico. [Labaki \(2012\)](#) apresenta a interação dinâmica entre placas circulares rígidas e flexíveis em solos transversalmente isotrópicos estratificados.

Os estudos mais próximos à dinâmica de poços são encontrados em trabalhos que analisam estruturas cilíndricas enterradas, como em [Gazetas \(1983\)](#), o qual apresenta uma revisão do estado da arte de fundações submetidas a carregamentos provenientes de máquinas. Entre os exemplos apresentados destaca-se o de uma fundação cilíndrica enterrada em uma camada de solo que está a uma certa altura do topo rochoso, considerando a estrutura da fundação infinitamente rígida. Com base em tais hipóteses apresenta-se uma formulação analítica para o cálculo das rigidezes do sistema bem como dos coeficientes de amortecimento para uma certa faixa de frequência.

Um trabalho que envolve o comportamento de estruturas cilíndricas flexíveis sob excitação dinâmica é o de [Shirasuna e Goto \(1984\)](#), onde é discutido o comportamento de um reservatório cilíndrico enterrado durante excitação sísmica. Para tanto, comparam-se dados observados em campo de um reservatório existente com um modelo numérico elaborado utilizando o MEF. Os mesmos autores, através dos mesmos métodos em [Goto e Shirasuna \(1984\)](#), fazem a análise de um conjunto de reservatórios em solos moles sob a ação de carregamentos sísmicos.

O trabalho de [Chen e Penzien \(1985\)](#) utiliza uma formulação baseada na forma indireta do Método dos Elementos de Contorno, no Método dos Elementos Finitos e no acoplamento entre as duas técnicas para fundações axissimétricas em um meio isotrópico e homogêneo, no qual simula-se uma fundação superficial rígida e sem massa sobrejacente ao solo e duas fundações profundas cilíndricas, uma rígida vazada e outra flexível vazada e preenchida.

O estudo de fundações axissimétricas é discutido também em [Emperador e Dominguez \(1989\)](#), onde desenvolve-se a formulação a partir do MEC direto, investiga-se o comportamento de fundações cilíndricas e de fundações hemisféricas. Um modelo equivalente ao de Winkler é usado em [Veletsos e Younan \(1995\)](#) para simular o comportamento de um cilindro rígido em um meio viscoelástico sob o efeito de uma aceleração horizontal harmônica e sísmica, sendo esse trabalho uma alternativa aos métodos numéricos implementados a seguir.

3 Tensões e Deformações

Antes de desenvolver as formulações e métodos numéricos deste trabalho, é preciso apresentar as relações entre tensões, deformações e deslocamentos, tanto em coordenadas cartesianas quanto em coordenadas cilíndricas, uma vez que a formulação é toda baseada em elasticidade linear e pode ser encontrada em [Timoshenko e Goodier \(1951\)](#). As relações são as condições de compatibilidade, que relacionam adequadamente deslocamentos e deformações, condições de equilíbrio de forças e relações constitutivas, que relacionam as tensões às deformações.

3.1 Coordenadas Cartesianas

Considerando o sistema de coordenadas cartesianas x , y e z , as componentes do deslocamento nas 3 direções são denotados por u_x , u_y e u_z . Para pequenos deslocamentos a relação com as deformações (compatibilidade) são dadas pelas seguintes expressões:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.3)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \quad (3.6)$$

onde ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{zz} são deformações normais e ϵ_{xy} , ϵ_{yz} e ϵ_{xz} são deformações cisalhantes ou tangenciais. A deformação volumétrica e é dada pela soma das deformações normais, ou seja:

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \quad (3.7)$$

As tensões podem ser relacionadas com as deformações (relações constitutivas) através da lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos:

$$\sigma_{xx} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} \quad (3.8)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} \quad (3.9)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} \quad (3.10)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy} \quad (3.11)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} \quad (3.12)$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} \quad (3.13)$$

onde λ e μ são constantes de Lamè. As constantes de Lamè estão relacionadas ao módulo de elasticidade E e ao coeficiente de Poisson ν por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.14)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.15)$$

As relações constitutivas podem ainda ser dadas diretamente em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy} \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{yz} \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{xz} \quad (3.21)$$

As equações de equilíbrio de acordo com as tensões para o caso estático são dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + F_x = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial x} + F_y = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + F_z = 0 \quad (3.24)$$

onde F_x , F_y e F_z são forças de corpo e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. As equações de equilíbrio podem ser expressadas ainda em função dos deslocamentos e deformações. Já que o material é considerado isotrópico, utilizando as constantes de Lamé λ e μ , obtém-se:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 u_x + F_x = 0 \quad (3.25)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 u_y + F_y = 0 \quad (3.26)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + F_z = 0 \quad (3.27)$$

Estas equações são chamadas de equações de Navier, onde o Laplaciano em coordenadas cartesianas é:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.28)$$

3.2 Coordenadas Cilíndricas

As mesmas equações de elasticidade podem ser expressas em coordenadas cilíndricas, onde u_r , u_θ e u_z são: o deslocamento radial, circunferencial e axial respectivamente. Assim, as relações de compatibilidade se tornam:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3.29)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (3.30)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.31)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (3.32)$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (3.33)$$

$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.34)$$

As relações constitutivas ficam:

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{rr} \quad (3.35)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{\theta\theta} \quad (3.36)$$

$$\sigma_{zz} = \lambda e + 2\mu \epsilon_{zz} \quad (3.37)$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \epsilon_{r\theta} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{\theta z} = 2\mu \epsilon_{\theta z} \quad (3.39)$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu \epsilon_{rz} \quad (3.40)$$

onde e mais uma vez é a deformação volumétrica, porém desta vez dada em coordenadas cilíndricas, logo:

$$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} \quad (3.41)$$

As relações constitutivas podem ainda ser dadas diretamente em função do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu (\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})] \quad (3.42)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{zz})] \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})] \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{r\theta} \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{\theta z} \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{zr} \quad (3.47)$$

As equações de equilíbrio são dadas por:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + F_r = 0 \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + F_\theta = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + F_z = 0 \quad (3.50)$$

onde F_r , F_θ e F_z são forças de corpo e $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Assim como em coordenadas cartesianas, as equações de equilíbrio em coordenadas cilíndricas podem ser dadas em função dos deslocamentos, das deformações e das constantes de Lamé, portanto:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r = 0 \quad (3.51)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + F_\theta = 0 \quad (3.52)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + F_z = 0 \quad (3.53)$$

onde o Laplaciano em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.54)$$

4 Elementos Finitos

Necessita-se, para a análise do comportamento do poço, de uma formulação para simular a sua parede e placa de fundo em uma certa profundidade do semi-espço. A partir de tais premissas, desenvolve-se uma formulação em elementos finitos para simular a parede do poço, bem como seu acoplamento com a placa abaixo da superfície que simula a laje de fundo.

Utiliza-se neste trabalho também elementos finitos bidimensionais representados por elementos retangulares, utilizados para simular placas retangulares flexíveis. Tais elementos são utilizados para o problema de uma placa retangular apoiada sobre a superfície, o qual é um exemplo de aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho para problemas de interação solo-estrutura. Portanto, além da análise do poço, verifica-se possível a aplicação do método a outros casos.

Utilizam-se, para o poço, elementos unidimensionais que são caracterizados por elementos axissimétricos que simulam cascas cilíndricas (parede) e placas circulares flexíveis (laje de fundo). A seguir, apresenta-se o desenvolvimento da formulação de tais elementos.

4.1 Elemento Retangular

Baseado na teoria de Kirchhoff-Love para placas delgadas, apresenta-se a formulação de um elemento retangular de 4 nós (um nó em cada vértice) e 3 graus de liberdade por nó: o deslocamento vertical na direção z , rotação em torno do eixo x e rotação em torno do eixo y . Portanto a matriz de rigidez e a matriz de massa do elemento apresentam 12 graus de liberdade. A figura 3 ilustra os graus de liberdade do problema.

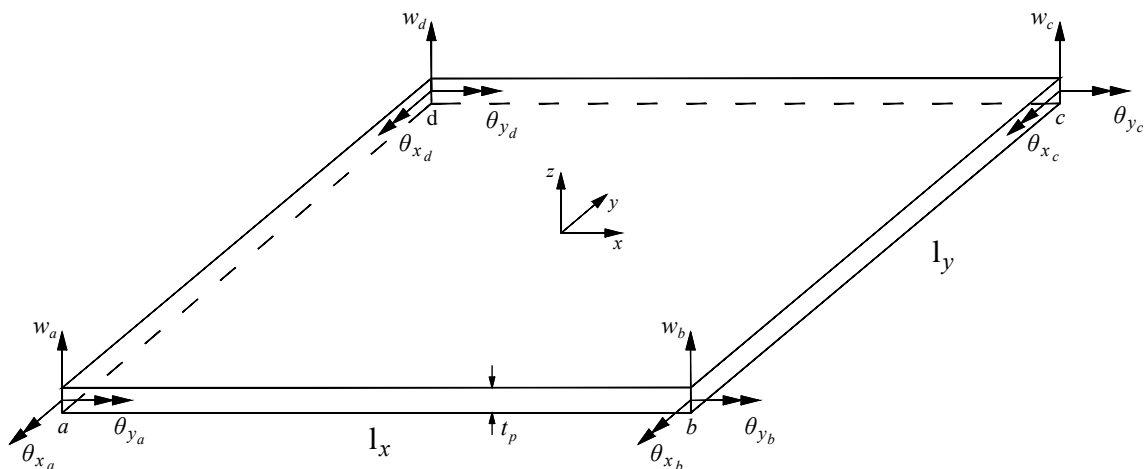


Figura 3 – Elemento retangular: diretrizes e considerações para a formulação.

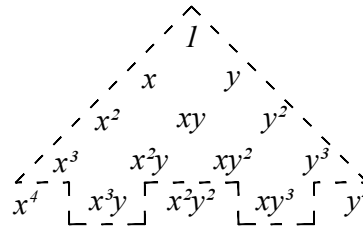


Figura 4 – Elementos selecionados no triângulo de Pascal

Visto que o elemento tem 12 graus de liberdade, seleciona-se para a função aproximadora um polinômio com 12 termos em x e y para representar o deslocamento vertical em toda a superfície da placa.

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (4.1)$$

ou na forma matricial:

$$w = \{p\} \{a\} \quad (4.2)$$

onde

$$\{p\} = \left\{ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \right\}$$

O polinômio é de quarto grau incompleto e completo até o terceiro grau. No triângulo de Pascal é possível notar os termos de quarto grau, os quais são incluídos para se manter o elemento geometricamente isotrópico.

A matriz de rigidez, a matriz de massa e o vetor de forças nodais equivalentes para um carregamento distribuído na placa na direção z são derivados pelo processo usual a partir dos princípios de energia. Este elemento é chamado elemento ACM pois foi originalmente desenvolvido por [Adini e Clough \(1961\)](#) e [Melosh \(1961\)](#). As matrizes de rigidez e de massa podem ser encontradas em [Clough e Toche \(1965\)](#), [Przemieniecki \(1968\)](#) e no anexo A deste trabalho.

As rotações θ_x e θ_y são derivadas do deslocamento w nas direções y e x respectivamente, logo:

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.3)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.4)$$

As constantes a_1 a a_{12} do polinômio escolhido podem ser organizadas de forma matricial relacionando-as com os deslocamentos e rotações.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

ou simplesmente:

$$\{d\} = [P] \{a\} \quad (4.6)$$

sendo $\{d\}$ o vetor de deslocamentos para qualquer coordenada do elemento. Nos nós a, b, c e d os deslocamentos são dados por:

$$\{u_{no}\} = [C] \{a\} \quad (4.7)$$

onde $\{u_{no}\}$ é o vetor de deslocamentos e rotações por nó do elemento, logo:

$$\{u_{no}\}^T = \left\{ w_a \quad \theta_{xa} \quad \theta_{ya} \quad w_b \quad \theta_{xb} \quad \theta_{yb} \quad w_c \quad \theta_{xc} \quad \theta_{yc} \quad w_d \quad \theta_{xd} \quad \theta_{yd} \right\} \quad (4.8)$$

Portanto a matriz $[C]$ é uma matriz com 12 linhas por 12 colunas, agrupada de acordo com os nós a, b, c e d, tendo como base a matriz $[P]$, sendo as 3 primeiras linhas da matriz $[C]$ relativas ao nó a (deslocamento w_a , rotação θ_{xa} e rotação θ_{ya}), as próximas 3 linhas relativas ao nó b e assim sucessivamente até o nó d.

As coordenadas dos nós a, b, c e d são dadas também em forma matricial, onde a primeira coluna representa as coordenadas em x e a segunda coluna são as coordenadas em y dos nós:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_x}{2} & -\frac{l_y}{2} \\ \frac{l_x}{2} & -\frac{l_y}{2} \\ \frac{l_x}{2} & \frac{l_y}{2} \\ -\frac{l_x}{2} & \frac{l_y}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Substituindo as coordenadas dos nós nos respectivos valores de x e y da matriz $[C]$, obtém-se os valores numéricos de $[C]$. Como $\{u_{no}\} = [C] \{a\}$, então $\{a\} = [C]^{-1} \{u_{no}\}$. Substituindo o vetor de constantes $\{a\}$ na equação 4.6 obtém-se:

$$\{d\} = [P] [C]^{-1} \{u_{no}\} \quad (4.10)$$

Definindo então a matriz das funções de forma de tamanho 3×12 , chega-se a:

$$[N] = [P][C]^{-1} \quad (4.11)$$

$$\{d\} = [N]\{u_{no}\} \quad (4.12)$$

A primeira linha de $[N]$ calculada para as coordenadas $(0,0)$ fornece as funções de influência dos deslocamentos e rotações dos nós sobre o deslocamento no centro do elemento $w_{co} = \{N_0\}\{u_{no}\}$. O vetor $\{N_0\}$ é dado então por:

$$\{N_0\} = \left\{ \frac{1}{4} \quad \frac{l_y}{16} \quad -\frac{l_x}{16} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{l_y}{16} \quad \frac{l_x}{16} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{l_y}{16} \quad \frac{l_x}{16} \quad \frac{1}{4} \quad -\frac{l_y}{16} \quad -\frac{l_x}{16} \right\} \quad (4.13)$$

As curvaturas, de acordo com a teoria de placas de delgadas, são dadas por:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.15)$$

$$\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.16)$$

Assim, relacionando as curvaturas ao polinômio aproximador:

$$\kappa_x = -2a_4 - 6a_7x - 2a_8y - 6a_{11}xy \quad (4.17)$$

$$\kappa_y = -2a_6 - 2a_9x - 6a_{10}y - 6a_{12}xy \quad (4.18)$$

$$\kappa_{xy} = -2a_5 - 4a_8x - 4a_9y - 6a_{11}x^2 - 6a_{12}y^2 \quad (4.19)$$

ou ainda na forma matricial:

$$\{\kappa\} = [G]\{a\}$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 - 6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Como $\{a\} = [C]^{-1}\{u_{no}\}$, então $\{\kappa\} = [G][C]^{-1}\{u_{no}\}$, ou ainda $\{\kappa\} = [B]\{u_{no}\}$,

onde:

$$[B] = [G][C]^{-1} \quad (4.21)$$

Os momentos na placa são dados por:

$$\{M\} = [D_m] \{\kappa\}$$

$$\{M\} = [D_m] [B] \{u_{no}\} \quad (4.22)$$

onde

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D_m] = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

sendo E , t_p e ν o módulo de elasticidade do material, a espessura da placa e o coeficiente de Poisson respectivamente. A matriz rigidez é obtida então na forma usual por:

$$[K] = \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} [B]^T [D] [B] dx dy \quad (4.23)$$

As forças nodais equivalentes devidas a carregamentos distribuídos sobre todo elemento são dadas por:

$$\{F\} = \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} [N]^T \{q\} dx dy \quad (4.24)$$

onde

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_z \\ m_x \\ m_y \end{Bmatrix}$$

Consequentemente para um carregamento distribuído q_z sobre todo elemento na direção z e valor nulo para momentos distribuídos nas direções x e y chega-se ao vetor final de forças nodais equivalentes, que pode ser verificados no anexo A deste trabalho.

A matriz de massa do elemento é dada por:

$$[M] = \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \rho t_p \{N_w\}^T \{N_w\} dx dy \quad (4.25)$$

onde ρ e t_p são a massa específica e a espessura do elemento respectivamente. O vetor $\{N_w\}$ é dado por:

$$\{N_w\} = \{p\} [C]^{-1} \quad (4.26)$$

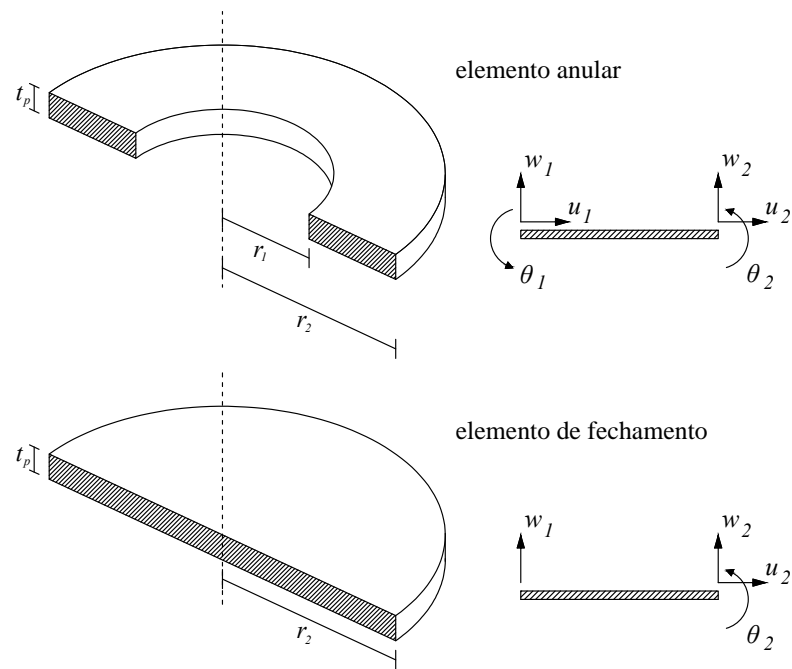


Figura 5 – Elemento de placa circular: graus de liberdade e dimensões.

4.2 Elemento de Placa Circular

A formulação a ser apresentada é baseada na teoria de flexão e de deformação radial de placas circulares com características axissimétricas, isotrópicas e homogêneas. Como a simetria é axissimétrica é possível representar os efeitos a partir de um elemento unidimensional com 2 nós e 6 graus de liberdade: 2 deslocamentos radiais, 2 deslocamentos transversais e 2 rotações, ou seja, 3 graus de liberdade por nó para um elemento com 2 nós.

Um disco completo pode ser discretizado por vários elementos anulares e um elemento circular de fechamento. O elemento de fechamento é constituído por 2 nós, porém com apenas 4 graus de liberdade: 1 deslocamento radial, 2 deslocamentos verticais e apenas 1 rotação, já que o deslocamento radial e a rotação no nó central do elemento, dado pelo centro de uma placa circular, são nulos. A figura 5 ilustra a caracterização dos elementos que formam uma placa circular.

Ressalta-se que os deslocamentos radiais são independentes dos deslocamentos verticais e das rotações. Portanto a equação que governa os deslocamentos radiais é baseada nas relações entre tensões, deformações e deslocamentos como é mostrado mais adiante. Entretanto os deslocamentos verticais e rotações estão relacionados entre si e são fundamentados na teoria de flexão de placas circulares delgadas.

Primeiramente é apresentado, então, a formulação de elemento finito de placa circular para os efeitos na direção radial de uma placa circular e em seguida a formulação para o efeito de flexão. Desta maneira, englobam-se todos os possíveis efeitos em uma análise axissimétrica a partir de elementos unidimensionais.

O problema para deformações axiais apresenta 2 graus de liberdade, são eles os

deslocamentos radiais u_1 e u_2 . As componentes de tensão e deformação em uma análise plana axissimétrica são dadas a partir das equações 3.29, 3.30, 3.35 e 3.36, logo:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (4.27)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (4.28)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (4.29)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}) \quad (4.30)$$

Observa-se que um dos elementos da equação 3.30 é nulo para o caso axissimétrico, portanto chega-se à equação 4.27. Da mesma forma, a equação de equilíbrio 3.48, no caso axissimétrico, é dada por:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (4.31)$$

Portanto a equação de equilíbrio na direção radial em termos do deslocamento é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \frac{u_r}{r} - \frac{u_r}{r} - \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{E}{(\nu^2-1)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{E}{r(\nu^2-1)} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{E}{r^2(\nu^2-1)} u_r &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

As condições de contorno são dadas por: $u(r_1) = u_1$ e $u(r_2) = u_2$. Resolvendo-se a equação diferencial e organizando a solução em função dos deslocamentos u_1 e u_2 , chega-se aos valores das funções de forma:

$$u(r) = \frac{r^2 r_1 - r_1 r_2^2}{r(r_1^2 - r_2^2)} u_1 + \frac{-r^2 r_2 + r_2 r_1^2}{r(r_1^2 - r_2^2)} u_2$$

ou

$$u(r) = N_1 u_1 + N_2 u_2$$

onde

$$N_1 = \frac{r^2 r_1 - r_1 r_2^2}{r(r_1^2 - r_2^2)} \quad (4.33)$$

$$N_2 = \frac{-r^2 r_2 + r_2 r_1^2}{r(r_1^2 - r_2^2)} \quad (4.34)$$

A matriz de rigidez de tamanho 2×2 do elemento anular pode então ser obtida impondo um deslocamento unitário em um dos nós e deslocamento nulo no outro nó. Assim, ao adotar um deslocamento unitário para o grau de liberdade u_1 enquanto o deslocamento u_2 permanece zero, encontram-se os elementos k_{11} e k_{21} da matriz de rigidez, ao passo que para o deslocamento unitário aplicado ao grau de liberdade u_2 e anulando o grau de liberdade u_1 , encontram-se os elementos k_{12} e k_{22} da matriz de rigidez. Note-se que é necessário a multiplicação por $2\pi r$, uma vez que as forças radiais são dadas por unidade de comprimento.

$$[K] = \frac{E}{(\nu^2 - 1)} \frac{2\pi}{(r_1^2 - r_2^2)} \begin{bmatrix} r_1^2(\nu + 1) - r_2^2(\nu - 1) & -2r_1r_2 \\ -2r_1r_2 & r_2^2(\nu + 1) - r_1^2(\nu - 1) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

O vetor de cargas nodais equivalentes a uma carga distribuída uniforme unitária pode ser obtido através das funções de forma e é dado por:

$$\{F\} = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \{N\}^T dr \quad (4.36)$$

Os valores do vetor $\{F\}$ são encontrados no anexo A deste trabalho. A matriz de massa do elemento também pode ser obtida integrando o vetor das funções de forma:

$$[M] = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \rho t_p \{N\}^T \{N\} dr \quad (4.37)$$

onde ρ e t_p são a densidade e a espessura da placa, respectivamente. Os valores da matriz de massa $[M]$ são dados no anexo A.

As matrizes e vetores obtidos se referem a um elemento anular. No entanto, para a discretização de uma placa circular é preciso de um elemento de fechamento. Tal elemento é obtido quando o raio menor r_1 de um elemento anular é zero. Neste caso as matrizes de rigidez, de massa e o vetor de cargas nodais equivalentes tornam-se iguais as matriz do elemento anular quando o raio r_1 tende a zero, logo:

$$[K_f] = \lim_{r_1 \rightarrow 0} [K] \quad (4.38)$$

$$\{F_f\} = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \{F\} \quad (4.39)$$

$$[M_f] = \lim_{r_1 \rightarrow 0} [M] \quad (4.40)$$

Nota-se que para o elemento de fechamento o deslocamento no nó 1 é nulo ($u_1 = 0$). Portanto, esse elemento tem apenas o grau de liberdade u_2 . Consequentemente as primeiras linhas e colunas das matrizes e vetor acima foram ser eliminadas, logo as matrizes de rigidez, de massa e o vetor de cargas equivalentes apresentam apenas 1 elemento. Logo:

$$\begin{aligned} [K_f] &= -2\pi \frac{E}{\nu - 1} \\ \{F_f\} &= \frac{2}{3} \pi r_2^2 \\ [M_f] &= \frac{1}{2} \rho t_p \pi r_2^2 \end{aligned}$$

onde E é o módulo de elasticidade, ρ é a massa específica e t_p é a espessura do elemento. Baseado no artigo de [Pardoen e Hagen \(1972\)](#), apresenta-se a seguir a formulação do elemento finito circular devido ao efeito da flexão. O elemento apresenta 4 graus de liberdade, sendo 2 deslocamentos verticais (w_1 e w_2) e 2 rotações (θ_1 e θ_2). A equação diferencial de flexão de placa circular com carga axissimétrica é uma equação de quarta ordem dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D} \quad (4.41)$$

onde a rigidez da placa é dada por:

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.42)$$

A deflexão transversal $w(r)$ de um placa anular com espessura uniforme pode ser obtida com os deslocamentos e rotações nodais:

$$w(r) = \varphi_1(r) w_1 + \varphi_2(r) \theta_1 + \varphi_3(r) w_2 + \varphi_4(r) \theta_2 \quad (4.43)$$

Logo $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\varphi_3(r)$ e $\varphi_4(r)$ são as funções de forma do elemento e lembrando também que as rotações são:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{dw(r_1)}{dr} \\ \theta_2 &= \frac{dw(r_2)}{dr} \end{aligned}$$

Em forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \left\{ \varphi_1(r) \quad \varphi_2(r) \quad \varphi_3(r) \quad \varphi_4(r) \right\} \\ \{d_{no}\} &= \left\{ w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \right\}^T \\ w(r) &= \{N\} \{d_{no}\} = \left\{ \varphi_1(r) \quad \varphi_2(r) \quad \varphi_3(r) \quad \varphi_4(r) \right\} \left\{ w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \right\}^T \quad (4.44) \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação diferencial 4.41 para uma carga nula ($q = 0$) e organizando a solução em função dos deslocamentos e rotações nodais dados pelo vetor $\{d_{no}\}$, chega-se aos valores das funções de forma, que ainda podem ser dadas através de uma multiplicação de um vetor $\{g\}$ por uma matriz $[\gamma]$. Logo:

$$\begin{aligned}\{N\} &= \{g\} [\gamma]^T \\ \{N\}^T &= [\gamma] \{g\}^T\end{aligned}\quad (4.45)$$

Os valores da matriz γ e do vetor g são apresentados no anexo A. O momento fletor e a força cortante por unidade de comprimento em qualquer ponto do elemento são dados por:

$$M = D \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right) \quad (4.46)$$

$$V = D \left\{ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw(r)}{dr} \right) \right] \right\} \quad (4.47)$$

Os elementos da matriz de rigidez de tamanho 4×4 podem ser obtidos da reação à força cortante e ao momento multiplicados pelo comprimento $2\pi r_i$ nas bordas do elemento, para deslocamentos e rotações unitários impostos nestas mesmas bordas, ou seja, de forma análoga que a matriz de rigidez é obtida para o caso de deformação axial.

Os elementos da primeira coluna k_{11} , k_{21} , k_{31} e k_{41} são iguais aos valores das reações obtidas a partir das equações 4.46 e 4.47 para o caso de um deslocamento unitário em w_1 e nulo em θ_1 , w_2 , θ_2 . As outras colunas da matriz rigidez são obtidas de forma análoga à primeira.

O vetor de cargas nodais equivalentes pode ser obtido integrando o deslocamento multiplicado pela carga aplicada sobre o elemento:

$$\begin{aligned}\{F\} &= \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r q(r) \{N\}^T dr \\ \{F\} &= [\gamma] \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r q(r) \{g\}^T dr\end{aligned}\quad (4.48)$$

Considerando uma carga uniforme $q(r) = q_0$, chega-se ao vetor $\{F\}$ dado no anexo A. A matriz de massa de tamanho 4×4 do elemento pode ser obtida integrando o vetor das funções de forma:

$$\begin{aligned}[M] &= \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \rho t_p \{N\}^T \{N\} dr \\ [M] &= [\gamma] \left(\int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \rho t_p \{g\}^T \{g\} dr \right) [\gamma]^T\end{aligned}\quad (4.49)$$

O elemento central de fechamento da placa circular pode ser considerado um elemento anular com o raio menor r_1 tendendo a zero. Neste caso as matrizes de rigidez, de massa e o vetor de cargas nodais equivalentes ficam:

$$[K_f] = \lim_{r_1 \rightarrow 0} [K] \quad (4.50)$$

$$\{F_f\} = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \{F\} \quad (4.51)$$

$$[M_f] = \lim_{r_1 \rightarrow 0} [M] \quad (4.52)$$

Vale salientar que para o elemento de fechamento, a rotação no nó 1 θ_1 é nula. Portanto, esse elemento tem apenas 3 graus de liberdade: o deslocamento w_1 do nó 1 e o deslocamento w_2 e a rotação θ_2 do nó 2. Assim as segundas linhas e colunas são eliminadas nas matrizes e vetor acima.

A matriz final de rigidez do elemento finito anular de 6 graus de liberdade e do elemento de fechamento de 4 graus de liberdade para placa circular contemplando já os efeitos de deformação radial e flexão são expressas no anexo A.

Nota-se que o elemento apresentado para placa circular fornece a solução exata visto que não se utiliza uma função aproximadora ou qualquer outro tipo de aproximação para a resolução da equação diferencial e sim a solução exata que é dada em função dos deslocamentos e rotações nodais. Esse procedimento também pode ser chamado de formulação forte para a resolução da equação diferencial.

4.3 Elemento de Casca Cilíndrica

O elemento finito a ser empregado é fundamentado na teoria de cascas cilíndricas com características axissimétricas, isotrópicas e homogêneas. O desenvolvimento do elemento em questão pode ser encontrado em detalhes em [Neto et al. \(2015\)](#) e as funções de forma e matrizes são dadas no anexo A. Considera-se um elemento unidimensional de 6 graus de liberdade: 2 deslocamentos radiais, 2 deslocamentos verticais e 2 rotações, ou seja, 3 graus de liberdade por nó para um elemento com 2 nós. [Timoshenko e Woinowsky-Krieger \(1959\)](#) equacionam o comportamento de uma casca cilíndrica com espessura constante e sujeita a um carregamento distribuído na superfície da seguinte maneira:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{E t_c}{a^2} w = q \quad (4.53)$$

onde w é o deslocamento radial, a é o raio, E é o módulo de elasticidade, t_c é a espessura da casca, q é o carregamento distribuído na direção radial e D é a rigidez da casca dada pela equação 4.42. Nota-se que o comportamento da casca cilíndrica é dado por uma equação diferencial ordinária de quarta ordem semelhante à de uma viga prismática apoiada em um meio elástico sob efeito de uma carga distribuída.

A equação 4.53 não contempla os efeitos dos deslocamentos verticais. Somente os deslocamentos radiais e rotações estão relacionadas por essa equação, logo, tratam-se tais

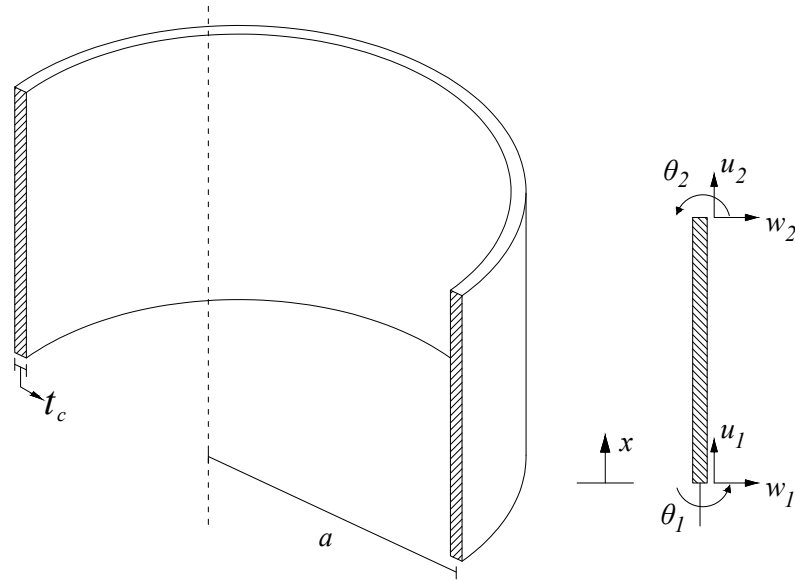


Figura 6 – Elemento de casca cilíndrica: graus de liberdade e dimensões.

efeitos separadamente. Baseando-se na equação 4.53, desenvolve-se as matrizes referentes aos graus de liberdade w_1 , θ_1 , w_2 e θ_2 .

O efeito de tração e compressão relativo aos graus de liberdade u_1 e u_2 a ser adotado neste trabalho, devido as deformações axiais, é o mesmo que o de um elemento de barra com seção constante e é independente dos efeitos radiais e rotações, esses últimos dependentes entre si. A equação diferencial que caracteriza tal efeito pode ser encontrada na maioria dos materiais bibliográficos referentes à elementos finitos como em Kwon e Bang (2000) e é expressa por:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = q \quad (4.54)$$

onde E é o módulo de elasticidade, A é a área da seção transversal e q é o carregamento distribuído na direção longitudinal do elemento. As equações diferenciais 4.53 e 4.54 são portanto a base para desenvolver-se o elemento finito cilíndrico que ao todo possui 6 graus de liberdade. Alguns trabalhos apresentam diferentes desenvolvimentos a partir de premissas semelhantes para o elemento cilíndrico, como pode ser visto em Rodrigues (2009), porém as matrizes finais do elemento são diferentes.

Inicialmente é abordado o comportamento da casca cilíndrica relacionado à equação 4.53. Por se tratar de uma equação de quarta ordem e estar relacionada à 4 graus de liberdade, escolhe-se um polinômio aproximador como função interpoladora igual àquele apresentado para o caso clássico de flexão de uma viga prismática e é expresso por:

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (4.55)$$

As condições de contorno essenciais ou também chamadas condições de contorno de Dirichlet são expressas em função dos graus de liberdade do elemento e são aplicadas à função interpoladora e chega-se ao valor de $w(x)$ em função dos graus de liberdade do elemento.

Portanto é possível extrair também as funções de forma para o elemento e chega-se às mesmas funções de forma para uma viga prismática, já que a função interpoladora e as condições de contorno são as mesmas. As funções de forma neste caso são os polinômios cúbicos de Hermite.

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 \theta_1 + N_3 w_2 + N_4 \theta_2$$

Utiliza-se para o desenvolvimento da matriz de rigidez o método dos resíduos ponderados. Para tanto é necessário desenvolver a formulação fraca do problema em questão. O método considera a equação diferencial como um resíduo que multiplicado por uma função ponderadora ou função teste e integrado no domínio deve ser minimizado, logo:

$$\int_0^l \left(D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et_c}{a^2} w \right) \delta w dx = 0 \quad (4.56)$$

A resolução da equação 4.56 é feita a partir da utilização do método de Galerkin, no qual a função ponderadora δw escolhida é igual à função aproximadora dada pela função 4.55. Emprega-se então a integração por partes duas vezes e aplica-se as condições de contorno naturais ou também chamadas condições de contorno de Neumann e obtém-se a seguinte expressão:

$$D \int_0^l \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} dx + \frac{Et_c}{a^2} \int_0^l w \delta w dx + \left[M(x) \frac{d \delta w}{dx} \right]_0^l - [V(x) \delta w] = 0 \quad (4.57)$$

A expressão 4.57 fornece então a matriz de rigidez que pode ser vista no anexo A. As forças nodais equivalentes devidas a um carregamento distribuído sobre todo elemento são dadas por:

$$\{F\} = \int_0^l q [N]^T dx \quad (4.58)$$

A matriz de massa do elemento também pode ser obtida a partir da integração das funções de forma para um elemento com seção transversal constante por meio da seguinte expressão:

$$[M] = \rho A \int_0^l \{N\}^T \{N\} dr \quad (4.59)$$

Os graus de liberdade u_1 e u_2 referentes à equação 4.54 podem ter a matriz de rigidez $[K]$, de massa $[M]$ e vetor de forças nodais equivalentes $\{F\}$ determinados seguindo as mesmas diretrizes apresentadas para o efeito devido à flexão expresso na equação 4.53.

As matrizes de rigidez e massa finais do elemento cilíndrico bem como o vetor de cargas equivalentes que contemplam todos os seus efeitos têm tamanho 6x6 e 6x1 respectivamente e são expressas no anexo A.

5 Elementos de Contorno

Muitos problemas de mecânica dos solos estão relacionados à determinação de tensões e deslocamentos no solo sob a influência de cargas na superfície ou imersas no meio. Uma consideração frequentemente utilizada é a do solo como um espaço completo ou mesmo um semi-espaço elástico.

Um espaço carregado por uma carga dinâmica gera ondas elásticas que se propagam ao longo do meio, a representação da propagação e dos efeitos dessas ondas é matematicamente complexa, porém existe formulação desenvolvida para diversos tipos de carregamento e meios. As propriedades elásticas podem ser caracterizadas por um módulo de elasticidade e por um coeficiente de Poisson ao se considerar o meio elástico, homogêneo e isotrópico.

Uma técnica que se provou satisfatória e adequada para a determinação das tensões e deslocamentos devido a cargas aplicadas no meio é a utilização do Método dos Elementos de Contorno. O método é baseado em soluções fundamentais, que medem justamente o efeito em um certo ponto do espaço devido a um carregamento a uma certa distância do local onde se quer mensurar tal efeito. A maioria das fontes bibliográficas apresenta um enfoque maior no método direto dos elementos de contorno, porém neste trabalho adota-se o método indireto dos elementos de contorno.

Primeiramente são apresentados aspectos gerais do MEC indireto para que se possa compreender a ideia principal do método e também o motivo das deduções que se seguem após o resumo de como e quando é possível sua utilização e então avançar aos domínios dos casos de interação dinâmica solo-estrutura.

5.1 Método dos Elementos de Contorno - Forma Indireta

O método dos elementos de contorno indireto é um método numérico em que se procura uma solução aproximada para uma equação diferencial ordinária ou parcial e parte da seguinte premissa: encontrar uma distribuição de cargas em um espaço completo ou semi-espaço que de alguma forma reproduza as condições de contorno de um dado problema dentro do meio infinito ou semi-infinito. As cargas a serem encontradas não apresentam um significado físico real, em razão disso, o método é comumente chamado também de método das cargas fictícias.

Outra característica do método aqui empregado é o uso de funções de influência como soluções fundamentais. As funções de influência fornecem o estado de tensão e o deslocamento em um certo ponto do espaço devido à um carregamento com uma distribuição qualquer a uma certa distância. As funções de influência são obtidas a partir da integração das funções de Green que são determinadas quando o tipo de carga atuante é a função delta de Dirac, ou seja uma carga pontual.

As funções de Green apresentam singularidades muitas vezes indesejadas. Já ao se integrar uma função de Green ponderada pela função que descreve a distribuição dessa carga, obtém-se as funções de influência. O efeito do carregamento para funções de influência pode passar a não ser mais singular, sendo essa uma grande vantagem do método. Porém, ao mesmo tempo ocorre uma desvantagem. Como a função de Green é dada a partir de uma carga pontual, a mesma solução pode ser usada para várias análises, já para um carregamento distribuído, necessita-se de uma função de influência para cada tipo de distribuição da carga.

As funções de influência formam a base para o MEC-I aqui empregado. A importância e utilização de tais funções junto da aplicação do método são mostrados a partir de um exemplo de uma cavidade em um espaço infinito dado pela figura 7. Cabe salientar que muito do que é apresentado, inclusive o exemplo a seguir é o mesmo encontrado em [Crouch e Starfield \(1983\)](#), e muito similar aos apresentados em [Barros \(1997\)](#) e em [Barros \(2001\)](#).

O problema de uma cavidade em um meio infinito é mostrado na figura 7, o seu contorno é dado por C e é o problema real o qual se procura uma solução. A curva tracejada C' mostrada na figura 7 tem o mesmo formato da curva C usada para definir o contorno da cavidade e representa o problema auxiliar. A curva C' no entanto, não representa o contorno, somente marca a localização dos seguimentos lineares em um meio infinito que coincidem com o contorno C da cavidade.

Normalmente é mais simples achar soluções analíticas para a equação diferencial parcial em questão na região infinita do problema auxiliar do que no problema real. Supõe-se que seja possível reproduzir as mesmas condições de contorno no problema auxiliar ao longo do traçado C' que aquelas previstas no contorno C . Caso seja possível atender essa hipótese, o problema real é resolvido a partir do problema auxiliar.

Divide-se então C' em um número N de elementos e se assume satisfazer, a partir de uma solução aproximada, as condições de contorno dadas em C somente nos pontos médios dos elementos em C' . Sabendo-se as funções de influência do problema e com C' dividido em N elementos, procura-se então cargas fictícias, com base na superposição de efeitos em cada elemento, que proporcionam a condição de contorno requerida no ponto médio de cada elemento. Tais premissas são válidas somente quando adota-se uma aproximação constante da carga fictícia dentro do elemento.

Logo em seguida é necessário saber onde são posicionadas e qual deve ser a intensidade das cargas fictícias. Apesar de não se saber a princípio o valor das cargas fictícias, conhece-se qual o efeito delas combinadas através das condições de contorno em C . Portanto é possível se obter um sistema de equações lineares algébricas no qual as incógnitas são as cargas fictícias.

As coordenadas locais n e s são respectivamente perpendiculares e tangente à curva C . Supõe-se que todo o contorno é sujeito a uma tensão uniforme $\sigma_n = -p$ (compressão) e com a tensão cisalhante σ_s igual à zero. Pode-se considerar que cada elemento é sujeito a uma tensão normal $\sigma_n = -p$ ao longo de todo o seu comprimento mas sem tensão cisalhante ($\sigma_s = 0$), sendo essas as condições de contorno do problema real. Deseja-se, então, determinar

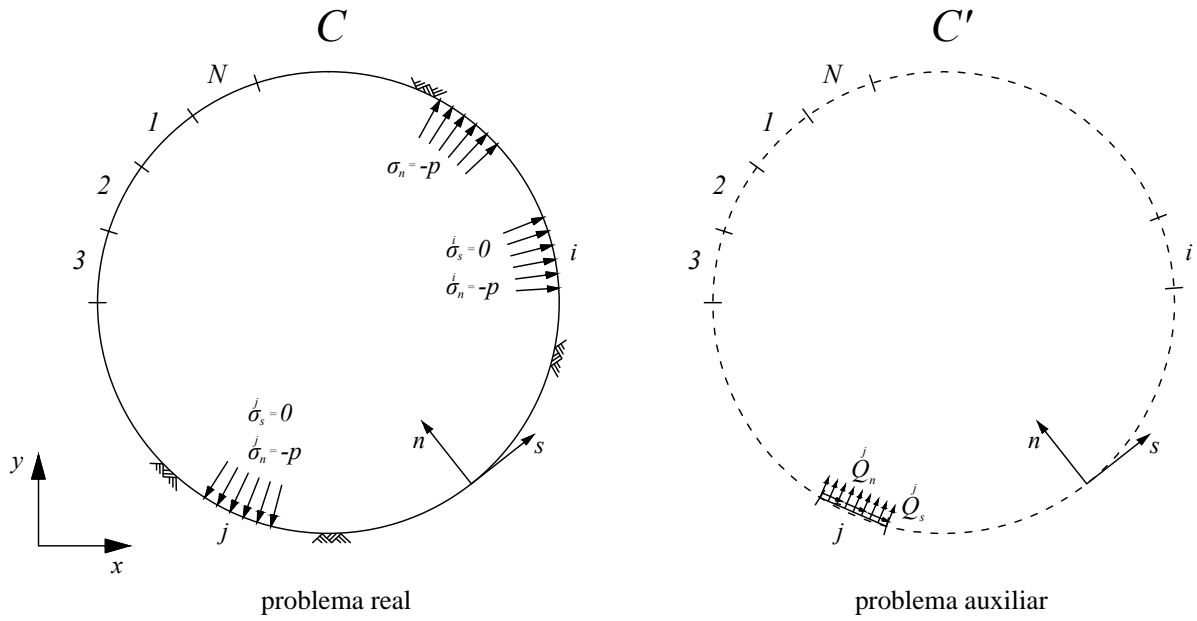


Figura 7 – Ilustração do MEC para o problema de uma cavidade no meio infinito.

os deslocamentos e tensões no corpo devido a esse carregamento no contorno.

A cavidade é assumida como sendo muito longa de forma que possa se considerar uma fatia representativa de espessura unitária perpendicular ao plano da figura. Portanto, ao se usar o termo cargas fictícias observa-se que na verdade essas são tensões fictícias que devem ser encontradas. Porém essa é só uma questão terminologia, continuar-se-á, por uma questão de facilidade, utilizar a nomenclatura cargas fictícias ao invés de tensões fictícias.

Aplicam-se então cargas fictícias normais e cisalhantes em cada elemento linear N ao longo da curva tracejada C' . Por simplicidade, somente as tensões aplicadas ao j -ésimo segmento é mostrada na figura 7. As cargas fictícias normais e cisalhantes aplicadas a esse segmento são denotadas por $Q_n^{(j)}$ e $Q_s^{(j)}$. Observa-se que as tensões normais e cisalhantes reais no j -ésimo segmento da curva C' não são $Q_n^{(j)}$ e $Q_s^{(j)}$. No j -ésimo elemento, tem-se as cargas fictícias $Q_n^{(j)}$ e $Q_s^{(j)}$ e as tensões reais $\sigma_n^{(j)}$ e $\sigma_s^{(j)}$, as quais são encontradas pelas cargas fictícias aplicadas em todos os N elementos ao longo da contorno.

Usando funções de influência previamente conhecidas para um carregamento unitário uniformemente distribuído para o exemplo, pode-se computar as tensões reais $\sigma_n^{(j)}$ e $\sigma_s^{(j)}$ no ponto médio de cada segmento da curva C' . Os resultados podem ser apresentados na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(i)} &= \sum_{j=1}^N T_{nn}^{(ij)} Q_n^{(j)} + \sum_{j=1}^N T_{ns}^{(ij)} Q_s^{(j)} \\ \sigma_s^{(i)} &= \sum_{j=1}^N T_{sn}^{(ij)} Q_n^{(j)} + \sum_{j=1}^N T_{ss}^{(ij)} Q_s^{(j)}\end{aligned}\quad (5.1)$$

onde $T_{nn}^{(ij)}$, $T_{ns}^{(ij)}$, $T_{sn}^{(ij)}$ e $T_{ss}^{(ij)}$ são as funções de influência para o cálculo das tensões do pro-

blema. A função $T_{sn}^{(ij)}$ por exemplo, fornece a tensão cisalhante real ($\sigma_s^{(i)}$) no ponto médio do i -ésimo elemento devido a um carregamento unitário distribuído aplicado no j -ésimo elemento.

Admitindo que seja possível encontrar cargas fictícias $Q_n^{(ij)}$ e $Q_s^{(ij)}$ de tal modo que as tensões reais $\sigma_n^{(i)}$ e $\sigma_s^{(i)}$ no sistema linear 5.1 tenham valores especificados pelas condições de contorno, então é possível resolver aproximadamente o problema físico dado na figura 7. Portanto:

$$\begin{aligned} -p &= \sum_{j=1}^N T_{nn}^{(ij)} Q_n^{(j)} + \sum_{j=1}^N T_{ns}^{(ij)} Q_s^{(j)} \\ 0 &= \sum_{j=1}^N T_{sn}^{(ij)} Q_n^{(j)} + \sum_{j=1}^N T_{ss}^{(ij)} Q_s^{(j)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Vale salientar que as tensões $Q_n^{(ij)}$ e $Q_s^{(ij)}$ nas equações acima são as quantidades fictícias, aqui chamadas de cargas fictícias. Elas são introduzidas para facilitar a solução numérica para um problema particular e não têm significado físico com respeito ao problema. Uma vez que o sistema linear das equações 5.2 é resolvido, pode-se expressar os deslocamentos e as tensões em qualquer ponto no corpo como outras combinações lineares das cargas fictícias $Q_n^{(ij)}$ e $Q_s^{(ij)}$. Portanto, para se obter os deslocamentos tem-se:

$$\begin{aligned} u_n^{(i)} &= \sum_{j=1}^N U_{nn}^{(ij)} Q_n^{(j)} + \sum_{j=1}^N U_{ns}^{(ij)} Q_s^{(j)} \\ u_s^{(i)} &= \sum_{j=1}^N U_{sn}^{(ij)} Q_n^{(j)} + \sum_{j=1}^N U_{ss}^{(ij)} Q_s^{(j)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde $U_{nn}^{(ij)}$, $U_{ns}^{(ij)}$, $U_{sn}^{(ij)}$ e $U_{ss}^{(ij)}$ são as funções de influência para o cálculo das tensões do problema e $u_n^{(i)}$ e $u_s^{(i)}$ são, respectivamente, os deslocamentos na direção normal e na direção tangente no ponto médio do i -ésimo elemento devidos ao carregamento aplicado no j -ésimo elemento. As equações relativas às tensões e aos deslocamentos podem ainda ser organizadas na forma matricial na seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n^{(1)} \\ \sigma_s^{(1)} \\ \sigma_n^{(2)} \\ \sigma_s^{(2)} \\ \sigma_n^{(3)} \\ \sigma_s^{(3)} \\ \vdots \\ \sigma_n^{(N)} \\ \sigma_s^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{nn}^{(11)} & T_{ns}^{(11)} & T_{nn}^{(12)} & T_{ns}^{(12)} & T_{nn}^{(13)} & T_{ns}^{(13)} & \dots & T_{nn}^{(1N)} & T_{ns}^{(1N)} \\ T_{sn}^{(11)} & T_{ss}^{(11)} & T_{sn}^{(12)} & T_{ss}^{(12)} & T_{sn}^{(13)} & T_{ss}^{(13)} & \dots & T_{sn}^{(1N)} & T_{ss}^{(1N)} \\ T_{nn}^{(21)} & T_{ns}^{(21)} & T_{nn}^{(22)} & T_{ns}^{(22)} & T_{nn}^{(23)} & T_{ns}^{(23)} & \dots & T_{nn}^{(2N)} & T_{ns}^{(2N)} \\ T_{sn}^{(21)} & T_{ss}^{(21)} & T_{sn}^{(22)} & T_{ss}^{(22)} & T_{sn}^{(23)} & T_{ss}^{(23)} & \dots & T_{sn}^{(2N)} & T_{ss}^{(2N)} \\ T_{nn}^{(31)} & T_{ns}^{(31)} & T_{nn}^{(32)} & T_{ns}^{(32)} & T_{nn}^{(33)} & T_{ns}^{(33)} & \dots & T_{nn}^{(3N)} & T_{ns}^{(3N)} \\ T_{sn}^{(31)} & T_{ss}^{(31)} & T_{sn}^{(32)} & T_{ss}^{(32)} & T_{sn}^{(33)} & T_{ss}^{(33)} & \dots & T_{sn}^{(3N)} & T_{ss}^{(3N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{nn}^{(N1)} & T_{ns}^{(N1)} & T_{nn}^{(N2)} & T_{ns}^{(N2)} & T_{nn}^{(N3)} & T_{ns}^{(N3)} & \dots & T_{nn}^{(NN)} & T_{ns}^{(NN)} \\ T_{sn}^{(N1)} & T_{ss}^{(N1)} & T_{sn}^{(N2)} & T_{ss}^{(N2)} & T_{sn}^{(N3)} & T_{ss}^{(N3)} & \dots & T_{sn}^{(NN)} & T_{ss}^{(NN)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n^{(1)} \\ Q_s^{(1)} \\ Q_n^{(2)} \\ Q_s^{(2)} \\ Q_n^{(3)} \\ Q_s^{(3)} \\ \vdots \\ Q_n^{(N)} \\ Q_s^{(N)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_n^{(1)} \\ u_s^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ u_s^{(2)} \\ u_n^{(3)} \\ u_s^{(3)} \\ \vdots \\ u_n^{(N)} \\ u_s^{(N)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{nn}^{(11)} & U_{ns}^{(11)} & U_{nn}^{(12)} & U_{ns}^{(12)} & U_{nn}^{(13)} & U_{ns}^{(13)} & \dots & U_{nn}^{(1N)} & U_{ns}^{(1N)} \\ U_{sn}^{(11)} & U_{ss}^{(11)} & U_{sn}^{(12)} & U_{ss}^{(12)} & U_{sn}^{(13)} & U_{ss}^{(13)} & \dots & U_{sn}^{(1N)} & U_{ss}^{(1N)} \\ U_{nn}^{(21)} & U_{ns}^{(21)} & U_{nn}^{(22)} & U_{ns}^{(22)} & U_{nn}^{(23)} & U_{ns}^{(23)} & \dots & U_{nn}^{(2N)} & U_{ns}^{(2N)} \\ U_{sn}^{(21)} & U_{ss}^{(21)} & U_{sn}^{(22)} & U_{ss}^{(22)} & U_{sn}^{(23)} & U_{ss}^{(23)} & \dots & U_{sn}^{(2N)} & U_{ss}^{(2N)} \\ U_{nn}^{(31)} & U_{ns}^{(31)} & U_{nn}^{(32)} & U_{ns}^{(32)} & U_{nn}^{(33)} & U_{ns}^{(33)} & \dots & U_{nn}^{(3N)} & U_{ns}^{(3N)} \\ U_{sn}^{(31)} & U_{ss}^{(31)} & U_{sn}^{(32)} & U_{ss}^{(32)} & U_{sn}^{(33)} & U_{ss}^{(33)} & \dots & U_{sn}^{(3N)} & U_{ss}^{(3N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{nn}^{(N1)} & U_{ns}^{(N1)} & U_{nn}^{(N2)} & U_{ns}^{(N2)} & U_{nn}^{(N3)} & U_{ns}^{(N3)} & \dots & U_{nn}^{(NN)} & U_{ns}^{(NN)} \\ U_{sn}^{(N1)} & U_{ss}^{(N1)} & U_{sn}^{(N2)} & U_{ss}^{(N2)} & U_{sn}^{(N3)} & U_{ss}^{(N3)} & \dots & U_{sn}^{(NN)} & U_{ss}^{(NN)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n^{(1)} \\ Q_s^{(1)} \\ Q_n^{(2)} \\ Q_s^{(2)} \\ Q_n^{(3)} \\ Q_s^{(3)} \\ \vdots \\ Q_n^{(N)} \\ Q_s^{(N)} \end{Bmatrix}$$

Observa-se que o exemplo acima é um problema no qual somente as tensões são prescritas, sendo elas as condições de contorno. Porém nada impede que exista um problema no qual os deslocamentos são prescritos e então utilizar as equações do sistema linear 5.3 para achar as incógnitas, no caso, as cargas fictícias. Há a possibilidade também de haver tensões e deslocamentos como condições de contorno, conseqüentemente uma combinação entre as equações 5.2 e 5.3 se faz necessária para a resolução do problema.

Há ainda a necessidade de se atentar para a análise de uma perturbação em um meio infinito que gera um salto de tensão justamente onde o carregamento é aplicado. Observa-se que ao se analisar as tensões devidas às funções de influência, elas podem ser positivas ou negativas, dependendo da orientação do tensor de tensões do problema. Esse tensor e os versores n_x e n_y se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

A resultante do vetor com componentes t_x e t_y é que diferencia um problema de uma cavidade vazia em um meio infinito como o utilizado acima de um problema onde a cavidade é preenchida e o meio externo à cavidade é vazio. Ou seja pode-se ter então um problema interior ou um problema exterior. A diferença entre a tensão positiva e a tensão negativa é justamente o valor do carregamento aplicado.

Apresentados os aspectos gerais do MEC-I, é necessário saber como são determinadas e quais são as funções de influência utilizadas para o desenvolvimento do presente trabalho.

5.2 Funções de Green

As diretrizes para que se possam obter as funções de Green e funções de influência são apresentadas a seguir. Nem todas as etapas desse procedimento são apresentadas, visto que os processos matemáticos aplicados são complexos, principalmente para problemas dinâmicos, e podem se encontradas em Barros (2006), Barros (2001) e Rajapakse e Wang (1993). Apresenta-se apenas o mais importante para o desenvolvimento das funções de influência.

Utiliza-se neste trabalho funções de Green e de influência desenvolvidas em [Barros \(2006\)](#) de semi-espaco para o caso axissimétrico. Uma sequência mais detalhada de como se chegar ao resultado final é apresentada em [Barros \(2001\)](#) e em [Rajapakse e Wang \(1993\)](#).

As soluções do problema são expressas em coordenadas cilíndricas. Logo as tensões, deslocamentos e carregamentos podem ser expressos por uma superposição de harmônicos do ângulo θ . A transformada de Hankel utilizada adiante permite reduzir o problema tridimensional a uma superposição de efeitos de um problema bidimensional através das coordenadas radial e vertical. O caso axissimétrico apresenta ainda uma simplicidade, pois somente o harmônico de ordem zero é necessário.

As equações de movimento para um meio elástico tridimensional isotrópico em coordenadas cilíndricas nada mais são que as equações de equilíbrio 3.51, 3.52 e 3.53 adicionadas de um termo inercial e desconsideradas as forças de corpo, portanto:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (5.7)$$

Admitindo que o movimento e a excitação sejam harmônicos com a frequência angular, então:

$$u_i(x, t) = u_i(x, \omega) e^{i\omega t} \quad (5.8)$$

onde $u_i(x, \omega)$ é a amplitude (complexa) do deslocamento e ω é a frequência angular. As equações de movimento no domínio da frequência podem ser dadas então por:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho \omega^2 u_r = 0 \quad (5.9)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \rho \omega^2 u_\theta = 0 \quad (5.10)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z + \rho \omega^2 u_z = 0 \quad (5.11)$$

A análise do regime transiente é perdida no domínio da frequência, pois fisicamente considera-se que transcorreu um certo período de tempo até que somente o regime permanente remanescesse, para que isso ocorra, atribui-se algum tipo de amortecimento ao sistema.

Os deslocamentos e tensões nas direções radial e vertical para o caso axissimétrico são independentes de θ , portanto é possível assumir as hipóteses de que não existe deslocamento na direção circunferencial ($u_\theta = 0$) e de que as grandezas permanecem constantes na direção circunferencial, ou seja, a variação é nula ($\partial(\cdot)/\partial\theta = 0$). Assim as equações 5.9, 5.10 e 5.11 do problema se reduzem somente às equações 5.9 e 5.11.

As funções de influência utilizadas neste trabalho derivam do desenvolvimento do trabalho de Barros (2006) e de Barros (2001), por essa razão, é necessário apresentar as equações de movimento para o caso axissimétrico de um meio elástico transversalmente isotrópico, uma vez que todo o desenvolvimento parte de tais equações. Portanto as equações do movimento para um meio transversalmente isotrópico, já considerando as hipóteses para a axissimetria, são expressas por:

$$c_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \rho \omega^2 u_r = 0 \quad (5.12)$$

$$c_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 u_z = 0 \quad (5.13)$$

O meio isotrópico é um caso particular do meio transversalmente isotrópico. Então, caso queira se obter os resultados para um meio isotrópico a partir da solução de meio transversalmente isotrópico, basta substituir as constantes elásticas c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} e c_{44} por suas equivalentes para um meio isotrópico que apresenta apenas duas constantes, no caso, as constantes de Lamé λ e μ . As relações entre as constantes elásticas no caso isotrópico podem ser expressas por:

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$$

$$c_{12} = c_{13} = \lambda$$

$$c_{44} = \mu$$

As equações 5.12 e 5.13 dão origem, primeiramente, às funções de Green do problema e às funções de influência a partir da integração das funções de Green para uma dada distribuição de carregamento. As equações acima estão na forma acoplada, ou seja as variáveis u_r e u_z são dependentes entre si. Para se achar uma solução analítica, necessita-se desacoplá-las. Desse modo busca-se artifícios matemáticos capazes de solucionar o problema.

Primeiramente, as constantes elásticas podem ser expressas por parâmetros adimensionais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{c_{33}}{c_{44}} \\ \beta &= \frac{c_{11}}{c_{44}} \\ \kappa &= \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{44}} \\ \delta^2 &= \frac{\rho \omega^2}{c_{44}} \end{aligned}$$

As equações 5.12 e 5.13 se tornam então:

$$\beta \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \kappa \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \delta^2 u_r = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \alpha \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \kappa \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \delta^2 u_z = 0 \quad (5.15)$$

Aplicando-se a transformada de Hankel de ordem 1 à equação 5.14 e de ordem 0 à equação 5.15, tem-se:

$$u_r(r, z, \omega) = \int_0^\infty \bar{u}_r J_1(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o$$

$$u_z(r, z, \omega) = \int_0^\infty \bar{u}_z J_0(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o$$

onde λ_o é o número de onda e J_m é a função de Bessel de primeiro tipo e m -ésima ordem. Desta etapa em diante os deslocamentos u_r e u_z são expressos no domínio de Hankel. Após a aplicação da transformada obtém-se:

$$-\beta \lambda_o^2 \bar{u}_r + \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial z^2} - \lambda_o \kappa \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \delta^2 \bar{u}_r = 0 \quad (5.16)$$

$$-\lambda_o^2 \bar{u}_z + \alpha \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} + \lambda_o \kappa \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} + \delta^2 \bar{u}_z = 0 \quad (5.17)$$

Chega-se se então a um sistema linear que em forma matricial, incluindo os operadores diferenciais, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} -\beta \lambda_o^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 & -\lambda_o \kappa \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda_o \kappa \frac{\partial}{\partial z} & -\lambda_o^2 + \alpha \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

O sistema linear 5.18 apresenta solução não-trivial quando o determinante da matriz é igual a zero. Adotando $\bar{u} = \bar{u}_r + \bar{u}_z$, tem-se:

$$(\beta - \lambda_o^2 \delta^2 - \beta \lambda_o^2 \delta^2 + \delta^4) \bar{u} - (\lambda_o^2 + \alpha \beta \lambda_o^2 - \alpha \delta^2 - \delta^2 - \kappa^2 \lambda_o^2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} = 0 \quad (5.19)$$

As soluções de \bar{u}_r e \bar{u}_z são desacopladas mas linearmente independentes de acordo com a equação 5.19 acima. Chamando $\gamma = 1 + \alpha\beta - \kappa$ e adotando um número de onda normalizado $\zeta = \lambda_o/\delta$ a equação 5.19 se torna:

$$[\beta \delta^4 \zeta^4 - (1 + \beta) \delta^4 \zeta^2 + \delta^4] \bar{u} + [(1 + \alpha) \delta^2 - \gamma \zeta^2 \delta^2] \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial z^4} = 0 \quad (5.20)$$

A equação diferencial homogênea de quarta ordem admite solução da seguinte forma:

$$\bar{u}_r(\lambda_o, z) = A_1 e^{-\delta \xi_1 z} + B_1 e^{\delta \xi_1 z} + A_2 e^{-\delta \xi_2 z} + B_2 e^{\delta \xi_2 z} \quad (5.21)$$

$$\bar{u}_z(\lambda_o, z) = A_1^* e^{-\delta \xi_1 z} + B_1^* e^{\delta \xi_1 z} + A_2^* e^{-\delta \xi_2 z} + B_2^* e^{\delta \xi_2 z} \quad (5.22)$$

onde ξ_1 e ξ_2 são as raízes da equação característica relativa à equação diferencial. A equação característica é dada por uma equação de quarto grau, assim:

$$[\beta \delta^4 \zeta^4 - (1 + \beta) \delta^4 \zeta^2 + \delta^4] + [(1 + \alpha) \delta^2 - \gamma \zeta^2 \delta^2] \xi^2 + \alpha \xi^4 = 0 \quad (5.23)$$

As raízes ξ_1 e ξ_2 são então expressas por:

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\frac{\gamma \zeta^2 - 1 - \alpha + \sqrt{\Phi}}{2\alpha}} \quad (5.24)$$

$$\xi_2 = \pm \sqrt{\frac{\gamma \zeta^2 - 1 - \alpha - \sqrt{\Phi}}{2\alpha}} \quad (5.25)$$

onde

$$\Phi = (\gamma \zeta^2 - 1 - \alpha)^2 - 4\alpha [\beta \zeta^4 - (1 + \beta) \zeta^2 + 1]$$

Como as equações 5.21 e 5.22 são linearmente dependentes, as constantes A_1 , B_1 , A_2 , B_2 , A_1^* , B_1^* , A_2^* e B_2^* são determinadas a partir das condições de contorno do problema. As constantes A_1^* , B_1^* , A_2^* e B_2^* podem ser expressas em função de A_1 , B_1 , A_2 e B_2 ao se substituir as soluções das equações 5.21 e 5.22 na equação 5.17, o resultado da substituição é expresso então:

$$A_1^* = \frac{\alpha \xi_1^2 - \zeta^2 + 1}{\kappa \zeta \xi_1} A_1 = \omega_1 A_1 \quad (5.26)$$

$$B_1^* = -\frac{\alpha \xi_1^2 - \zeta^2 + 1}{\kappa \zeta \xi_1} B_1 = -\omega_1 B_1 \quad (5.27)$$

$$A_2^* = \frac{\alpha \xi_2^2 - \zeta^2 + 1}{\kappa \zeta \xi_2} A_2 = \omega_2 A_2 \quad (5.28)$$

$$B_2^* = \frac{\alpha \xi_2^2 - \zeta^2 + 1}{\kappa \zeta \xi_2} B_2 = -\omega_2 B_2 \quad (5.29)$$

As tensões são obtidas diretamente da solução de \bar{u}_r e \bar{u}_z e pelas relações constitutivas. As relações constitutivas para um meio transversalmente isotrópico, já assumindo as hipótese de axissimetria e os parâmetros adimensionais, são dadas por:

$$\frac{1}{c_{44}} \sigma_{rr} = \beta \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\beta - 2\zeta) \frac{1}{r} u_r + (\kappa - 1) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{c_{44}} \sigma_{zz} = (\kappa - 1) \left(\frac{1}{r} u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \alpha \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5.31)$$

$$\frac{1}{c_{44}} \sigma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (5.32)$$

Aplica-se a transformada de Hankel de ordem zero na equação 5.31 e de ordem 1 na equação 5.32 e então substitui-se os valores de \bar{u}_r e \bar{u}_z por aqueles encontrados nas equações 5.21 e 5.22, como resultado tem-se os valores das tensões $\bar{\sigma}_{zz}$ e $\bar{\sigma}_{rz}$ no domínio transformado de Hankel. A tensão σ_{rr} é obtida a partir da substituição dos valores da transformada inversa de Hankel dos deslocamentos u_r e u_z .

$$\frac{1}{c_{44}} \bar{\sigma}_{zz}(\lambda_o, z) = \sum_{i=1}^2 \left\{ [\alpha \xi_i^2 \delta - \lambda_o (\kappa - 1) \rho_i] A_i e^{-\delta \xi_i z} + [\alpha \xi_i^2 \delta - \lambda_o (\kappa - 1) \rho_i] B_i e^{-\delta \xi_i z} \right\} \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{c_{44}} \bar{\sigma}_{rz}(\lambda_o, z) = \sum_{i=1}^2 \left[(\lambda_o \xi_i + \delta \xi_i \rho_i) A_i e^{-\delta \xi_i z} - (\lambda_o \xi_i + \delta \xi_i \rho_i) B_i e^{\delta \xi_i z} \right] \quad (5.34)$$

onde ρ_1 e ρ_2 são expressos por:

$$\rho_1 = \frac{\alpha \xi_1^2 - \zeta^2 + 1}{\kappa \zeta}$$

$$\rho_2 = \frac{\alpha \xi_2^2 - \zeta^2 + 1}{\kappa \zeta}$$

Os valores dos campos de deslocamento e dos campos de tensão expressos acima são a base para o desenvolvimento das funções de Green e das funções de influência. Opta-se aqui por soluções de semi-espço ao invés de soluções de espaço completo.

As soluções de espaço completo são obtidas de forma mais simples e por consequência a implementação computacional se torna menos complexa. Essa técnica porém apresenta desvantagens quando aplicada a problemas onde a superfície livre é significativa, como por exemplo o estudo de fundações. Nesses casos há a necessidade de se discretizar não somente o problema principal a ser estudado, mas também a superfície livre que circunda o problema até alguma distância finita.

As soluções de semi-espço evitam a discretização da superfície e somente o contorno do contato solo-estrutura é discretizado. O inconveniente dessa técnica é a maior dificuldade de se obter tais soluções de semi-espço, que normalmente são mais complexas que as soluções para o espaço completo.

Buscam-se funções de influência de semi-espço para os seguintes casos: disco de carga, anel de carga com espessura considerável e cilindro de carga, tanto na superfície

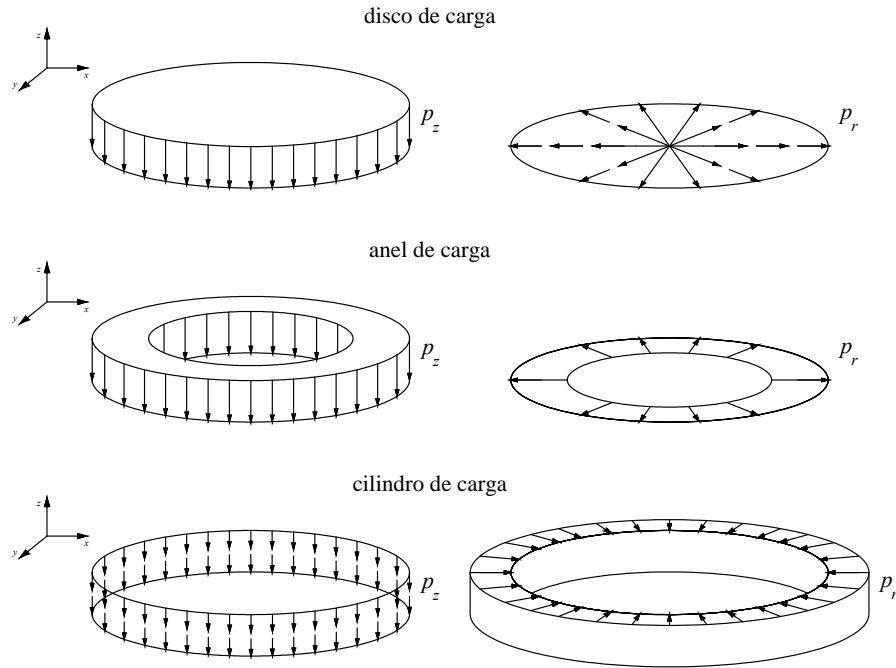


Figura 8 – Casos de carga: disco de carga, anel de carga e cilindro de carga.

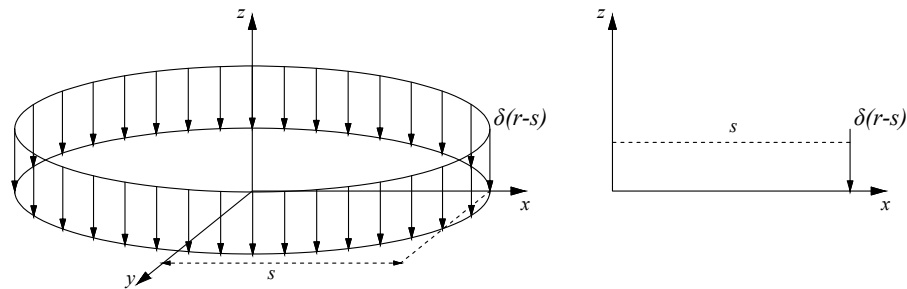


Figura 9 – Carregamento axissimétrico de uma função delta de Dirac na direção vertical.

quanto no interior do semi-espço nas direções radial e vertical, a figura 8 apresenta os casos de carregamentos citados.

A obtenção das funções de influência para deslocamentos e tensões pode ser dada pela integração do efeito das funções de Green ponderada pela função que descreve a distribuição dessa carga. Portanto buscam-se primeiro as funções de Green necessárias que resultam nas funções de influência citadas. Essas funções de Green são encontradas a partir de uma função delta de Dirac que, no caso axissimétrico, constitui um anel de carga.

A seguir são apresentadas diretrizes para a dedução da função de Green dada a partir de um carregamento na direção vertical na superfície do semi-espço de acordo com a figura 9. Os casos de carga na direção radial e no meio do semi-espço podem ser encontrados de forma similar ao caso apresentado.

Primeiramente, aplica-se as condições de contorno. O problema é caracterizado como um problema de valor de contorno em tensão devido à tensão imposta ao longo do contorno (superfície) pela carga aplicada $p_z(r)$, logo as condições de equilíbrio impõem que:

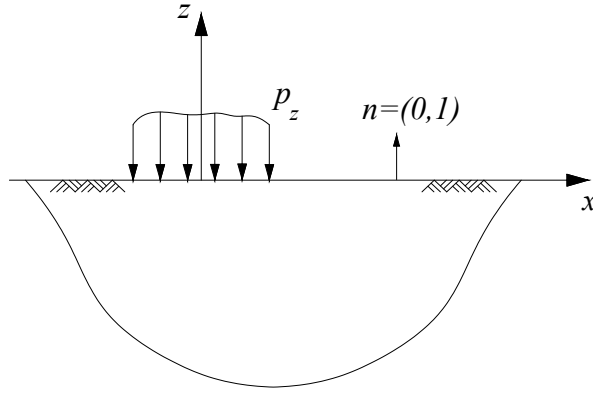


Figura 10 – Carga qualquer na direção vertical e direção do vetor unitário.

$$p_r(r) = \sigma_{rr}(r,0)n_r + \sigma_{rz}(r,0)n_z \quad (5.35)$$

$$p_z(r) = \sigma_{zr}(r,0)n_r + \sigma_{zz}(r,0)n_z \quad (5.36)$$

onde $\sigma_{rr}(r,0)$, $\sigma_{rr}(r,0)$, $\sigma_{rr}(r,0)$ e $\sigma_{rr}(r,0)$ são as componentes do tensor do estado de tensão ao longo da superfície ($z=0$) e n_r e n_z são as componentes radial e vertical do vetor unitário n normal à superfície de aplicação da carga.

De acordo com a orientação da figura 10, a direção do vetor unitário é dada por $n = (0,1)$. Desse modo as condições de equilíbrio ao longo da superfície ficam:

$$p_r(r) = \sigma_{rz}(r,0) \quad (5.37)$$

$$p_z(r) = \sigma_{zz}(r,0) \quad (5.38)$$

Portanto as condições de contorno para a carga vertical são dadas por:

$$\sigma_{rz}(r,0) = 0 \quad (5.39)$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = p_z(r) \quad (5.40)$$

Aplicando-se a transformada de Hankel às condições de contorno, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{rz}(\lambda_o, 0) = 0 \quad (5.41)$$

$$\bar{\sigma}_{zz}(\lambda_o, 0) = \bar{p}_z(\lambda_o) \quad (5.42)$$

As funções de Green devem também obedecer a condição de radiação de Sommerfeld. Assim substituindo as condições de contorno dadas pela radiação e por 5.39 e 5.40, substitui-se tais valores nas equações 5.33 e 5.34 e obtém-se os valores das constantes A_1 , B_1 , A_2 e B_2 , que ficam:

$$A_1(\lambda_o) = \frac{b_{32}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.43)$$

$$A_2(\lambda_o) = \frac{-b_{31}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.44)$$

$$B_1 = B_2 = 0 \quad (5.45)$$

onde b_{2i} e b_{3i} para $i = 1, 2$ são expressos por:

$$b_{2i} = \alpha \xi_i^2 - (\kappa - 1) \lambda_o \rho_i \quad (5.46)$$

$$b_{3i} = -\xi_i (\lambda_o + \delta \rho_i) \quad (5.47)$$

Os deslocamentos no domínio transformado \bar{u}_r e \bar{u}_z devidos a uma carga $\bar{p}_z(\lambda_o)$ aplicada na direção vertical são obtidos pela substituição dos valores das constantes encontradas A_1 , B_1 , A_2 e B_2 nas equações 5.21 e 5.22, portanto:

$$\bar{u}_r(\lambda_o, z) = \frac{\omega_1 b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} - \omega_2 b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.48)$$

$$\bar{u}_z(\lambda_o, z) = \frac{b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} + b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.49)$$

As tensões no domínio transformado $\bar{\sigma}_{rz}$ e $\bar{\sigma}_{zz}$ são encontradas pela substituição dos valores das constantes A_1 , B_1 , A_2 e B_2 nas equações 5.33 e 5.34. A tensão $\bar{\sigma}_{rr}$ tem um tratamento semelhante e portanto pode-se escrever as tensões no domínio transformado da seguinte maneira:

$$\bar{\sigma}_{rrz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{11}b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} - b_{12}b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.50)$$

$$\bar{\sigma}_{rzz}(\lambda_o, z) = -\frac{b_{31}b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} + b_{32}b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.51)$$

$$\bar{\sigma}_{zzz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{21}b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} + b_{22}b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21}b_{32} - b_{31}b_{22}} \frac{\bar{p}_z(\lambda_o)}{c_{44}} \quad (5.52)$$

Nas equações 5.50, 5.51 e 5.52 acima, os dois primeiros índices de $\bar{\sigma}_{ijk}$ indicam a componente do tensor de tensões, enquanto que o terceiro índice indica a direção de aplicação da carga, neste caso, como a carga aplicada é vertical, o terceiro índice é expresso somente pela componente z .

A obtenção das funções de Green para uma carga vertical na superfície é dada a partir da aplicação de uma função delta de Dirac:

$$p_z(r) = \delta(r - s) \quad (5.53)$$

A aplicação da transformada de Hankel de ordem 0 à equação 5.53 resulta:

$$\begin{aligned}\bar{p}_z(\lambda_o) &= \int_0^\infty \delta(r-s) J_0(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \\ \bar{p}_z(\lambda_o) &= s J_0(\lambda_o s)\end{aligned}\quad (5.54)$$

O valor da carga $\bar{p}_z(\lambda_o)$ transformada para uma função delta de Dirac, expresso na equação 5.54, pode ser substituído nas equações 5.48 e 5.49, gerando assim, as funções de Green no domínio transformado de Hankel para os deslocamentos:

$$\bar{G}_{rz}(\lambda_o, z) = \frac{\omega_1 b_{32} e^{-\delta \xi_{1z}} - \omega_2 b_{31} e^{-\delta \xi_{2z}}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{s J_0(\lambda_o s)}{c_{44}} \quad (5.55)$$

$$\bar{G}_{zz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{32} e^{-\delta \xi_{1z}} + b_{31} e^{-\delta \xi_{2z}}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{s J_0(\lambda_o s)}{c_{44}} \quad (5.56)$$

Nas equações 5.55 e 5.56 o primeiro índice de \bar{G}_{ij} indica a direção do deslocamento e o segundo índice indica a direção de aplicação da carga, no caso, carga vertical. As funções de Green para as tensões são obtidas de forma semelhante aos deslocamentos. Substitui-se o valor expresso em 5.54 nas equações 5.50, 5.51 e 5.52, dessa forma:

$$\bar{\sigma}_{rrz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{11} b_{32} e^{-\delta \xi_{1z}} - b_{12} b_{31} e^{-\delta \xi_{2z}}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{s J_0(\lambda_o s)}{c_{44}} \quad (5.57)$$

$$\bar{\sigma}_{rzz}(\lambda_o, z) = -\frac{b_{31} b_{32} e^{-\delta \xi_{1z}} + b_{32} b_{31} e^{-\delta \xi_{2z}}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{s J_0(\lambda_o s)}{c_{44}} \quad (5.58)$$

$$\bar{\sigma}_{zzz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{21} b_{32} e^{-\delta \xi_{1z}} + b_{22} b_{31} e^{-\delta \xi_{2z}}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{s J_0(\lambda_o s)}{c_{44}} \quad (5.59)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Hankel é possível obter as funções de Green no domínio original do problema, logo, para os deslocamentos:

$$G_{rz} = \int_0^\infty \bar{G}_{rz}(\lambda_o, z) J_1(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.60)$$

$$G_{zz} = \int_0^\infty \bar{G}_{zz}(\lambda_o, z) J_0(\lambda_o r) \lambda d\lambda_o \quad (5.61)$$

As tensões no domínio original são expressas por:

$$\sigma_{rrz} = \int_0^\infty \bar{\sigma}_{rrz}(\lambda_o, z) J_0(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.62)$$

$$\sigma_{rzz} = \int_0^\infty \bar{\sigma}_{rzz}(\lambda_o, z) J_1(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.63)$$

$$\sigma_{zzz} = \int_0^\infty \bar{\sigma}_{zzz}(\lambda_o, z) J_0(\lambda_o r) \lambda d\lambda_o \quad (5.64)$$

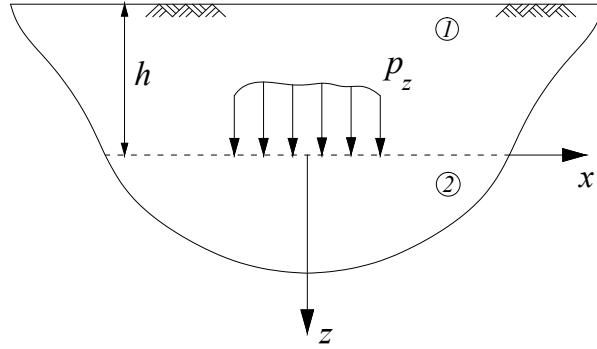


Figura 11 – Carga vertical no interior do semi-espaço.

As funções de Green para um carregamento no interior do semi-espaço podem ser obtidas pelo mesmo processo exibido acima, porém as condições de contorno são diferentes. Separa-se o semi-espaço em dois meios e hipotéticos e observa-se as relações entre tensões e deslocamentos. A figura 11 ilustra o caso de um carregamento vertical no interior do semi-espaço.

Na figura 11 o meio 1 é representado por $-h \leq z < 0$ e o meio 2 por $0 \leq z < \infty$, onde a coordenada para $z = 0$ é a interface entre os dois meios. As condições de contorno para um carregamento vertical são então dadas como se segue:

$$\sigma_{rz}^{(1)}(r, 0) - \sigma_{rz}^{(2)}(r, 0) = 0 \quad (5.65)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r, 0) - \sigma_{zz}^{(2)}(r, 0) = p_z(r) \quad (5.66)$$

$$u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 0) = 0 \quad (5.67)$$

$$u_z^{(1)}(r, 0) - u_z^{(2)}(r, 0) = 0 \quad (5.68)$$

onde os índices superiores indicam a que meio se referem os deslocamentos e tensões. Com estas condições é possível definir o valor das constantes A_1 , B_1 , A_2 e B_2 e a partir daí chegar às funções de Green no interior do semi-espaço para uma carga vertical. As funções de Green para cargas horizontais são obtidas de maneira similar à mostrada anteriormente. A função delta de Dirac na direção radial é similar à direção vertical ilustrada na figura 9 e sua transformada de Hankel de primeira ordem é expressa por:

$$\begin{aligned} p_r(r) &= \delta(r - s) \\ \bar{p}_r &= sJ_1(\lambda_o s) \end{aligned} \quad (5.69)$$

5.3 Funções de Influência

Conhecidas as funções de Green do problema, é possível então se obter as funções de influência. Sabe-se que as funções de influência fornecem o estado de tensão e o deslocamento em um certo ponto do espaço devido à um carregamento com uma distribuição qualquer a uma certa distância e existem duas maneiras distintas que podem ser empregadas para se obter o efeito de cargas distribuídas ao longo de superfícies. A primeira maneira, mais geral, consiste na integração das funções de Green multiplicadas (ponderadas) pela distribuição da carga ao longo do seu plano de aplicação como já citado anteriormente. Dessa forma, a determinação do efeito de uma carga $p_i(r)$ atuando no contorno entre os pontos $r = r_1$ e $r = r_2$ e sabendo-se as funções de Green do meio e tipo de contorno, é dada por:

$$u_i(r, z) = \int_{r_1}^{r_2} G_{ij}(r - r_0, z) p_j(r_0) dr \quad (5.70)$$

onde $u_i(r, z)$ é o deslocamento no ponto (r, z) na direção i a uma distância $r - r_0$ do ponto de aplicação da carga p_j que é a componente da direção j (radial ou vertical) da distribuição de carga $p(r)$. Para o caso de uma distribuição uniformemente distribuída unitária da carga p_j , determina-se a função de influência:

$$U_{ij}(r, z) = \int_{r_1}^{r_2} G_{ij}(r - r_0, z) dr \quad (5.71)$$

O mesmo procedimento pode ser utilizado para a determinação do estado de tensão. O método dos elementos de contorno direto emprega essa técnica em muitos casos, pois se baseia em equações integrais de contorno. Nesse método adota-se uma distribuição para as incógnitas do problema (tensões e deslocamentos) ao longo dos elementos que discretizam o contorno e utilizam-se essas distribuições em conjunto das funções de Green.

A outra alternativa para se obter as funções de influência é aplicar a transformada de Hankel da carga e utilizá-la no lugar da carga transformada da linha de carga concentrada, dada pela função delta de Dirac. Portanto é possível se aproveitar as deduções encontradas nas equações 5.48, 5.49, 5.50, 5.51 e 5.52 para exemplos de carregamentos distribuídos na direção vertical na superfície livre e não somente para uma carga concentrada (delta de Dirac).

O caso de um disco de carga vertical uniforme aplicado na superfície livre é representado na figura 12. Para esse exemplo, as condições de contorno são as mesmas daquelas apresentadas em 5.39 e 5.40, logo, basta substituir os valores transformados para um disco de carga no lugar da carga $\bar{p}_z(\lambda_o)$ nas equações 5.48, 5.49, 5.50, 5.51 e 5.52.

O disco de carga vertical da figura 12 pode ser representado da seguinte maneira:

$$q_z(r) = \begin{cases} q_z & r \leq s \\ 0 & r > s \end{cases} \quad (5.72)$$

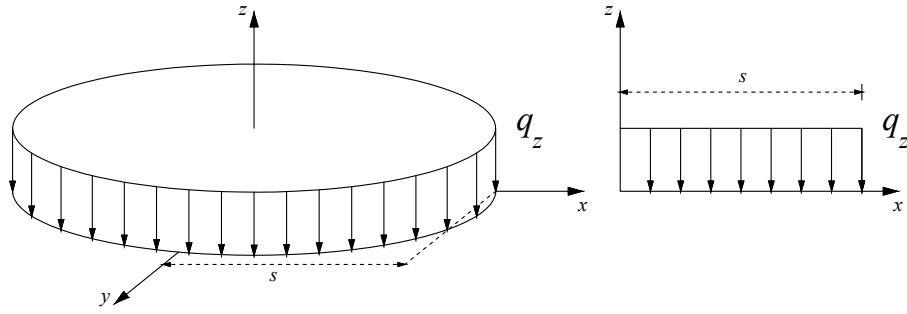


Figura 12 – Disco de carga uniforme na direção vertical.

Aplicando-se a transformada de Hankel:

$$\bar{q}_z(\lambda_o) = \frac{q_z}{\lambda_o} s J_1(\lambda_o s) \quad (5.73)$$

O valor de $\bar{q}_z(\lambda_o)$ substituído nas equações 5.48 e 5.49 para os deslocamentos resulta em:

$$\bar{U}_{rz}(\lambda_o, z) = \frac{\omega_1 b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} - \omega_2 b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{q_z}{c_{44} \lambda_o} s J_1(\lambda_o s) \quad (5.74)$$

$$\bar{U}_{zz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} + b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{q_z}{c_{44} \lambda_o} s J_1(\lambda_o s) \quad (5.75)$$

Nas equações 5.74 e 5.75 o primeiro índice de U_{ij} indica a direção do deslocamento e o segundo índice indica a direção de aplicação da carga, no caso, carga vertical.

Da mesma forma, para as tensões, substitui-se o valor de $\bar{p}_z(\lambda_o)$ por $\bar{q}_z(\lambda_o)$ nas equações 5.50, 5.51 e 5.52 resultando em:

$$\bar{T}_{rrz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{11} b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} - b_{12} b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{q_z}{c_{44} \lambda_o} s J_1(\lambda_o s) \quad (5.76)$$

$$\bar{T}_{rzz}(\lambda_o, z) = -\frac{b_{31} b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} + b_{32} b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{q_z}{c_{44} \lambda_o} s J_1(\lambda_o s) \quad (5.77)$$

$$\bar{T}_{zzz}(\lambda_o, z) = \frac{b_{21} b_{32} e^{-\delta \xi_1 z} + b_{22} b_{31} e^{-\delta \xi_2 z}}{b_{21} b_{32} - b_{31} b_{22}} \frac{q_z}{c_{44} \lambda_o} s J_1(\lambda_o s) \quad (5.78)$$

Nas equações 5.76, 5.77 e 5.78 acima, os dois primeiros índices de \bar{T}_{ijk} indicam a componente da tensão, enquanto que o terceiro índice indica a direção de aplicação da carga, neste caso, como a carga aplicada é vertical, o terceiro índice é expresso somente pela componente z .

A solução pode ser obtida no domínio original através da transformada inversa da Hankel, para os deslocamentos tem-se:

$$U_{rz} = \int_0^\infty \bar{U}_{rz}(\lambda_o, z) J_1(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.79)$$

$$U_{zz} = \int_0^\infty \bar{U}_{zz}(\lambda_o, z) J_0(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.80)$$

As tensões no domínio original são expressas por:

$$T_{rrz} = \int_0^\infty \bar{T}_{rrz}(\lambda_o, z) J_0(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.81)$$

$$T_{rzz} = \int_0^\infty \bar{T}_{rzz}(\lambda_o, z) J_1(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.82)$$

$$T_{zzz} = \int_0^\infty \bar{T}_{zzz}(\lambda_o, z) J_0(\lambda_o r) \lambda_o d\lambda_o \quad (5.83)$$

As funções de influência para um anel de carga vertical com espessura considerável podem ser obtidas da mesma maneira aplicada para o disco de carga, ou seja, basta substituir o valor da carga transformada no domínio de Hankel no lugar de $\bar{p}_z(\lambda_o)$.

As funções de influência para uma carga cilíndrica são obtidas do primeiro modo apresentado, ou seja, através da integração da função de Green multiplicada pela distribuição da carga ao longo do seu plano de aplicação. Como a distribuição não é dada na direção radial e sim na direção vertical, se faz necessária a integração da solução de Green da linha de carga anelar ao longo da direção vertical para obtenção das funções de influência.

Para se obter as expressões dos deslocamentos e tensões causados por uma carga distribuída ao longo da lateral de um cilindro de raio a e altura $2l$, integra-se o efeito de anéis de carga aplicados ao longo desse cilindro. Para os deslocamentos, tem-se:

$$U_{rr}(r, z) = \int_{h_0-l}^{h_0+l} G'_{rr}(r, z, h) dh \quad (5.84)$$

$$U_{rz}(r, z) = \int_{h_0-l}^{h_0+l} G'_{rz}(r, z, h) dh \quad (5.85)$$

$$U_{zr}(r, z) = \int_{h_0-l}^{h_0+l} G'_{rz}(r, z, h) dh \quad (5.86)$$

$$U_{zz}(r, z) = \int_{h_0-l}^{h_0+l} G'_{zz}(r, z, h) dh \quad (5.87)$$

onde G'_{ij} são as funções de Green no interior do semi-espaco e U_{ij} são as funções de influência de deslocamento, em que o primeiro índice i é referente à direção do deslocamento e o segundo índice j é a direção em que o anel de carga está aplicado.

O mesmo processo pode ser aplicado para se encontrar as funções de influência para as tensões, que ao invés de 4 funções, possui 6 funções.

Como nessa operação o ponto de observação é fixo e a coordenada z do ponto de aplicação da carga é a variável de integração, é conveniente mudar a origem da sistema de coordenadas. A origem é adotada, assim, na superfície livre do semi espaco. Para essa nova

origem substitui-se nas expressões anteriores z por $z - h$, sendo h uma distância vertical variável a partir da superfície.

6 Acoplamento MEF-MEC

Apresentados os elementos finitos e os elementos de contorno utilizados, é preciso agora apresentar o acoplamento entre os métodos. A estrutura é discretizada pelo MEF e solo pelo MEC. O acoplamento consiste em reunir as matrizes de rigidez e de massa do MEF e as matrizes de influência de deslocamento e de tensão do MEC e matrizes que possam compatibilizar a interface entre MEF e MEC. O intuito é desenvolver um sistema linear global no qual se envolvam as equações desenvolvidas nos capítulos anteriores de forma que atendam as condições de compatibilidade e equilíbrio na interface solo-estrutura.

O método de acoplamento apresentado é genérico, relativamente simples e pode servir para boa parte dos problemas de interação solo-estrutura na engenharia, como por exemplo *radiers* que são placas flexíveis apoiadas sobre o solo. A técnica ainda pode ser adequada para estruturas semi-enterradas como a estrutura a ser analisada neste trabalho, no caso, poços de grande diâmetro. Estruturas enterradas como túneis ou mesmo sistemas híbridos, como por exemplo um *radier* estaqueado, também podem ser adequadas para este método de acoplamento.

O acoplamento permite a modelagem de estruturas que podem ser rígidas, flexíveis ou mesmo que podem ter uma parte rígida e outra flexível, bem como podem ter um formato qualquer. O fator limitante de uma configuração geométrica muito diferente de estruturas consideradas como padrões na engenharia, fica por conta da dificuldade em discretizar tal estrutura por meio de elementos finitos e também de se obter funções de influência compatíveis com o problema, mas não pelo acoplamento em si. A escolha de uma geometria bem definida é capaz de gerar resultados mais confiáveis e que em alguns casos específicos apresentam soluções analíticas para as integrais do problema, evitando assim, a necessidade de integração numérica.

Considera-se que a estrutura é perfeitamente aderida ao solo, os efeitos dados na estrutura pelo MEF e os efeitos do solo dados pelo MEC são equivalentes, isto é, solo e estrutura estão interligados de forma que qualquer perturbação, seja na estrutura, seja no solo, todo o sistema é alterado de forma conjunta.

6.1 Elementos Finitos

O desenvolvimento do método de acoplamento é baseado no exemplo da figura 13 de uma estrutura flexível de forma arbitrária apoiada sobre o solo considerado como um semi-espaço elástico. Aplica-se um carregamento harmônico dinâmico externo com distribuição e direção qualquer $P(t)$ e a estrutura é considerada perfeitamente aderida ao solo. Desconsiderando-se o amortecimento do material, o equilíbrio dinâmico da estrutura flexível sob a ação da carga externa é expresso por:

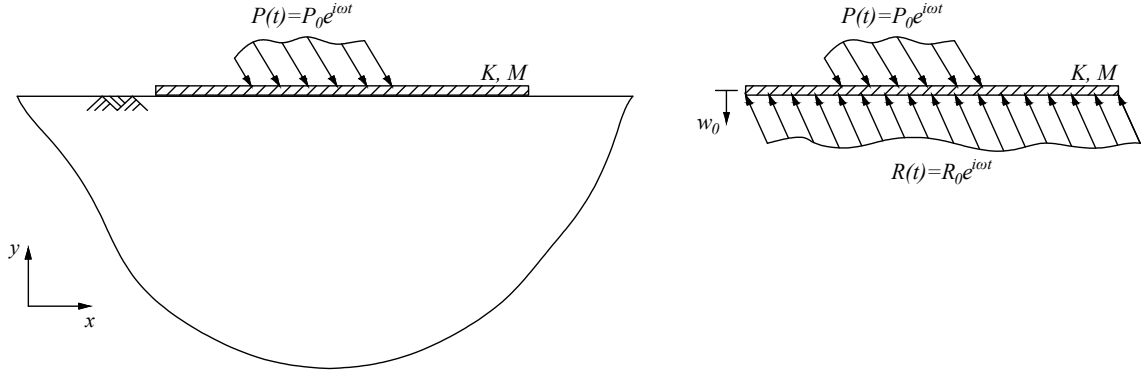


Figura 13 – Representação de uma estrutura flexível apoiada sobre o solo sujeita a um carregamento harmônico e diagrama de corpo livre do problema.

$$\begin{aligned}
 P(t) - Kw(t) - R(t) &= M \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} \\
 P_0 e^{i\omega t} - Kw(t) - R_0 e^{i\omega t} &= M \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde K é o coeficiente de rigidez da estrutura, M é a massa, ω é a frequência circular do carregamento, $R(t)$ é a reação do solo e $w(t)$ é o deslocamento em função do tempo.

A equação de equilíbrio dinâmico é uma equação diferencial ordinária não-homogênea. Uma solução particular da equação 6.1 pode ser da forma $w(t) = w_0 e^{i\omega t}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 P_0 e^{i\omega t} - Kw_0 e^{i\omega t} - R_0 e^{i\omega t} &= -M\omega^2 w_0 e^{i\omega t} \\
 P_0 - Kw_0 - R_0 &= -M\omega^2 w_0 \\
 (K - \omega^2 M) w_0 &= P_0 - R_0
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde P_0 , w_0 e R_0 são as amplitudes da carga aplicada, do deslocamento e da reação do solo, respectivamente.

O comportamento da estrutura pode ser representado pela equação 6.2 e adota-se uma modelagem em elementos finitos. O passo seguinte consiste em dividir a fundação em n_e número de elementos finitos, que resulta em n_n número de nós. O número de graus de liberdade por nó é dado por n_{gdl} , portanto se obtém uma estrutura com um número global de graus de liberdade $n_g = n_n * n_{gdl}$. Considera-se os nós dos elementos finitos nos pontos mais extremos do elemento, como pode ser visto na figura 14. A equação 6.2 pode ser dada então por:

$$([K]_{n_g \times n_g} - \omega^2 [M]_{n_g \times n_g}) \{w_0\}_{n_g \times 1} = \{P_0\}_{n_g \times 1} - \{R_0\}_{n_g \times 1} \tag{6.3}$$

onde $[K]$ é a matriz global de rigidez, $[M]$ é a matriz global de massa, $\{w_0\}$ é o vetor dos deslocamentos e rotações relativos aos graus de liberdade nos nós dos elementos finitos, $\{P_0\}$ é o vetor do carregamento externo nos nós dos elementos finitos e $\{R_0\}$ é a reação do solo nos nós dos elementos finitos.

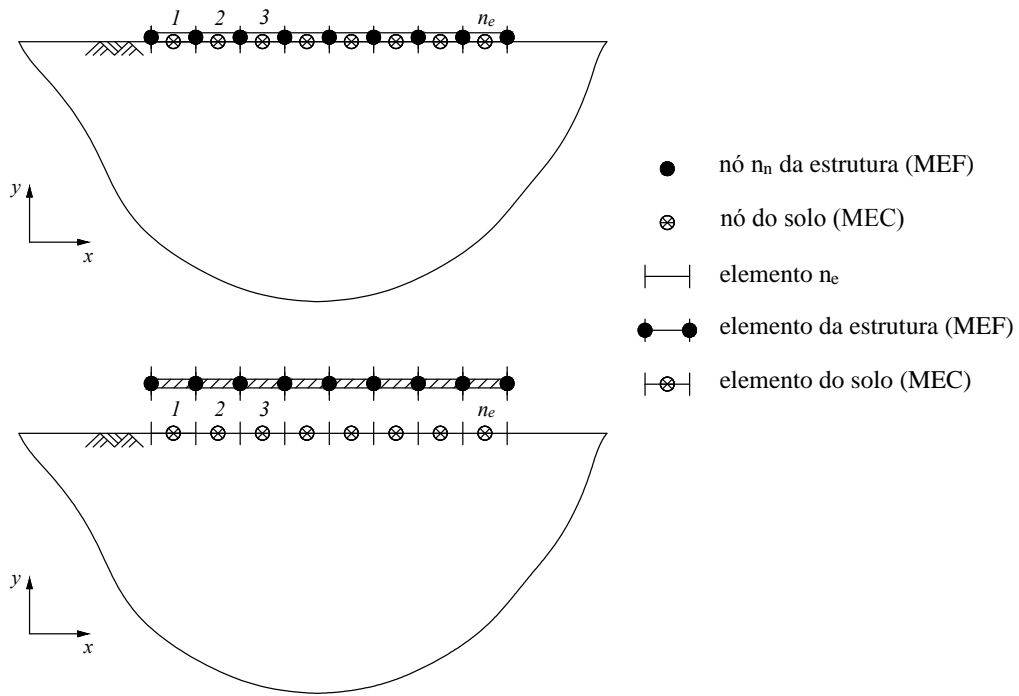


Figura 14 – Discretização do problema: elementos, nós da estrutura e nós do solo.

Nas equações acima a estrutura é isolada em um diagrama de corpo livre e o solo é representado como uma simples reação ao carregamento aplicado como se pode ver na figura 13, isto é, a reação do solo, no modelo de elementos finitos, é somente um carregamento distribuído aplicado aos seus elementos.

A reação do solo é dada por uma carga distribuída em cada elemento finito e supõe-se que os elementos são pequenos o bastante para que sua distribuição ao longo do elemento possa ser tomada como uniforme. Porém na equação 6.3, o vetor $\{R_0\}$ relativo à reação do solo é um vetor de cargas nodais, ou seja, é um vetor que necessita de uma função que transforme um carregamento uniforme constante, dado pelas tensões aplicadas pelo solo ao longo da interface solo-estrutura, em cargas nodais equivalentes. Desse maneira:

$$\{R_0\}_{n_g \times 1} = [A]_{n_g \times 2n_e} \{t\}_{2n_e \times 1} \quad (6.4)$$

onde a matriz $[A]$ é a matriz que transforma um carregamento uniformemente distribuído em cargas nodais equivalentes e $\{t\}$ é o vetor relativo ao carregamento distribuído que o solo aplica à estrutura, ou seja, é o vetor que representa as tensões aplicadas sobre o contorno da interface solo-estrutura que estão em equilíbrio com o sistema de forças externas e que ao mesmo tempo provocam deslocamentos ao longo da interface que são compatíveis com a rigidez da estrutura da fundação. A obtenção do vetor $\{t\}$ é discutida mais adiante.

A matriz $[A]$ é obtida a partir da integral da função de forma do elemento finito escolhido, de forma semelhante ao que é expresso nas equações 4.24, 4.36, 4.48 e 4.58. No anexo C deste trabalho é possível verificar os valores da matriz $[A]$ através de um exemplo.

6.2 Elementos de Contorno

Na relação entre o MEF e o MEC o que conecta os dois métodos é justamente a reação do solo, pois, a princípio, é necessário algum método para determiná-la. Somente através dos valores da reação do solo é possível determinar os deslocamentos e rotações do sistema acoplado. O cálculo da reação do solo pelos elementos de contorno se estabelece como uma alternativa à simulação do solo por algum tipo específico de suporte para a estrutura, que geraria as condições de contorno para a resolução do problema somente através dos elementos finitos, como apoios simples ou mesmo algum tipo mais elaborado de suporte como molas de Winkler. Inclusive pode se dispensar o uso de algum tipo específico de apoio para a estrutura, uma imposição do próprio MEF, ao se utilizar as soluções de semi-espaço.

Os elementos de contorno são divididos de forma que sua geometria coincida exatamente com a divisão da estrutura em elementos finitos, porém os nós são localizados no centro geométrico de cada elemento de acordo com o exemplo da figura 14. O efeito (deslocamentos e tensões) no elemento devido a uma carga aplicada a uma certa distância é medido neste nó central.

Os deslocamentos e as tensões no centro do elemento podem ser calculados através das matrizes de influência encontradas no capítulo 6, logo:

$$\{u\}_{2n_e \times 1} = [U]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1} \quad (6.5)$$

$$\{t\}_{2n_e \times 1} = [T]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1} \quad (6.6)$$

onde $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos, $[U]$ é a matriz das funções de influência para os deslocamentos, $\{t\}$ é o mesmo vetor de tensões da equação 6.4, $[T]$ é a matriz das funções de influência para as tensões e $\{Q\}$ é o vetor de cargas fictícias que são assumidas como uniformes ao longo de cada elemento de contorno.

Os vetores $\{u\}$ e $\{t\}$ têm tamanho $2n_e$ pois o problema tem duas dimensões. Consequentemente há dois deslocamentos, um para cada direção, e duas tensões por elemento a serem calculados. Para o exemplo da figura 13, considera-se como referência as direções horizontal x e vertical y e como resultado, têm-se os deslocamentos na direção horizontal u_x e vertical u_y em cada elemento.

Os nós dos elementos finitos não coincidem com os nós dos elementos de contorno. Portanto, para que haja compatibilidade entre os deslocamentos e rotações dos nós dos elementos finitos (localizados nas extremidades) e dos deslocamentos dos nós dos elementos de contorno (localizados no centro), necessita-se de uma função que possa determinar a relação entre os deslocamentos e rotações nos nós $\{w_0\}$ e os deslocamentos no centro do elemento. Assim assumindo que os deslocamentos no centro $\{u\}$ obtidos a partir do MEC são iguais aos deslocamentos equivalentes no centro do elemento relativos ao MEF.

$$\{u\}_{2n_e \times 1} = [D]_{2n_e \times 2n_g} \{w_0\}_{2n_g \times 1} \quad (6.7)$$

onde $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos no centro do elemento e são os mesmos encontrados a partir do MEC, $\{w_0\}$ são os deslocamentos dados pelo MEF e $[D]$ é a matriz de transformação. A matriz $[D]$ é obtida a partir das funções de forma usadas no elemento finito da estrutura.

A montagem da matriz $[D]$ parte da premissa que para se saber a influência dos deslocamentos e rotações nodais no centro do elemento, basta calcular os valores das funções de forma para o centro geométrico do elemento. De forma a se compreender melhor a montagem da matriz $[D]$ é possível verificar seus valores através de um exemplo no anexo C.

Juntando-se as equações 6.5 e 6.7 de acordo com o termo comum $\{u\}$, é possível obter uma equação que envolva os deslocamentos e rotações relativos MEF e as funções de influência e cargas fictícias relativos MEC:

$$\begin{aligned}\{u\}_{2n_e \times 1} &= [U]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1} \\ \{u\}_{2n_e \times 1} &= [D]_{2n_e \times 2n_g} \{w_0\}_{2n_g \times 1} \\ [D]_{2n_e \times 2n_g} \{w_0\}_{2n_g \times 1} &= [U]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1}\end{aligned}$$

$$[D]_{2n_e \times 2n_g} \{w_0\}_{2n_g \times 1} - [U]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1} = 0 \quad (6.8)$$

As tensões não necessitam de uma matriz de transformação como a matriz $[D]$, pois se considera o valor da tensão encontrada no centro do elemento como sendo uniformemente distribuído em todo o elemento. A reação do solo é dada pela equação 6.4 e a equação 6.6 determina como se obtém as tensões $\{t\}$. O vetor de reação do solo $\{R_0\}$ pode ser definido então por:

$$\begin{aligned}\{R_0\}_{n_g \times 1} &= [A]_{n_g \times 2n_e} \{t\}_{2n_e \times 1} \\ \{t\}_{2n_e \times 1} &= [T]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1} \\ \{R_0\}_{n_g \times 1} &= [A]_{n_g \times 2n_e} [T]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1}\end{aligned} \quad (6.9)$$

A equação de equilíbrio dinâmico é expressa pela equação 6.3 e a reação do solo $\{R_0\}$ é calculada de acordo com a equação 6.9. Substituindo-se o valor de $\{R_0\}$ na equação 6.3 é possível se obter a seguinte equação para o equilíbrio dinâmico:

$$\begin{aligned}\left([K]_{n_g \times n_g} - \omega^2 [M]_{n_g \times n_g}\right) \{w_0\}_{n_g \times 1} &= \{P_0\}_{n_g \times 1} - \{R_0\}_{n_g \times 1} \\ \{R_0\}_{n_g \times 1} &= [A]_{n_g \times 2n_e} [T]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1}\end{aligned}$$

$$\left([K]_{n_g \times n_g} - \omega^2 [M]_{n_g \times n_g}\right) \{w_0\}_{n_g \times 1} + [A]_{n_g \times 2n_e} [T]_{2n_e \times 2n_e} \{Q\}_{2n_e \times 1} = \{P_0\}_{n_g \times 1} \quad (6.10)$$

6.3 Sistema Global

O sistema global é obtido ao se reunir as equações obtidas para o MEF e para o MEC. Apresenta-se a seguir, de forma resumida e mais objetiva, as equações desenvolvidas para se chegar ao sistema linear global.

Inicialmente, a equação de equilíbrio dinâmico, já em forma matricial, é dada por:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} = \{P_0\} - \{R_0\}$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $[M]$ é a matriz de massa, ω é a frequência circular, $\{w_0\}$ é o vetor de deslocamentos e rotações nodais, $\{P_0\}$ é o vetor de forças e momentos aplicados nos nós e $\{R_0\}$ é o vetor de forças e momentos nodais equivalentes devido à reação do solo. O vetor $\{R_0\}$ pode ser definido por:

$$\{R_0\} = [A] \{t\}$$

onde $[A]$ é a matriz de transformação de cargas equivalentes e $\{t\}$ é o vetor de tensões nas direções x e y de acordo com a expressão 6.6. O vetor $\{t\}$ é definido por:

$$\{t\} = [T] \{Q\}$$

onde $[T]$ é a matriz de influência de tensões e $\{Q\}$ é o vetor de cargas fictícias. Logo a equação de equilíbrio dinâmico fica expressa por:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [A] [T] \{Q\} = \{P_0\} \quad (6.11)$$

Os deslocamentos no centro do elemento são dados por:

$$\{u\} = [U] \{Q\}$$

onde $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos horizontais e verticais no centro do elemento e $[U]$ é a matriz de influência dos deslocamentos. O vetor $\{u\}$ ainda pode ser definido em função dos deslocamentos e rotações nodais, através de uma matriz de equivalência $[D]$ que quando multiplicada pelos deslocamentos nodais reproduz os deslocamentos no centro dos elementos, da seguinte maneira:

$$\{u\} = [D] \{w_0\}$$

Assim os deslocamentos e rotações nodais e as funções de influência podem ser agrupados em uma só equação:

$$[D] \{w_0\} - [U] \{Q\} = 0 \quad (6.12)$$

Tabela 1 – Tamanho das matrizes e vetores do sistema acoplado global para um problema em duas dimensões.

Matriz ou vetor	Tamanho
$[K_d]$	$(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times (3n_{nb} + 3n_{np} - 5)$
$[A]$	$(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times 2n_e$
$[D]$	$2n_e \times (3n_{nb} + 3n_{np} - 5)$
$[U]$	$2n_e \times 2n_e$
$[T]$	$2n_e \times 2n_e$
$\{Q\}$	$2n_e \times 1$
$\{w_0\}$	$(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times 1$
$\{P_0\}$	$(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times 1$
$\{0\}$	$2n_e \times 1$

Agrupando-se as equações 6.11 e 6.12 é possível se chegar ao sistema global, que pode ser expresso em forma matricial para facilitar o entendimento e a visualização das incógnitas do problema, como é exibido a seguir:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [A] [T] \{Q\} = \{P_0\}$$

$$[D] \{w_0\} - [U] \{Q\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & [A] [T] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

O sistema global representado em 6.13 tem como incógnitas os deslocamentos e rotações nodais $\{w_0\}$ e as cargas fictícias $\{Q\}$. Obtidas as cargas fictícias, é possível achar a tensão real do problema a partir da equação $\{t\} = [T] \{Q\}$. Adota-se ainda o termo $[K_d] = [K] - \omega^2 [M]$, o sistema, portanto, fica:

$$\begin{bmatrix} [K_d] & [A] [T] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

A tabela 1 é um resumo do tamanho de cada elemento (matrizes e vetores) do sistema global.

Uma observação importante é que o exemplo utilizado na figura 13 para explanar o método de acoplamento e se chegar ao sistema global final, apresenta uma simplificação. Para uma estrutura que está somente apoiada sobre o solo e não enterrada e nem semi-enterrada, a carga fictícia é a própria tensão que o solo aplica na fundação, isso pode ser verificado pelos preceitos do método dos elementos de contorno e da determinação das funções de influência para semi-espço. Dessa maneira $\{t\} = \{Q\}$ e portanto a matriz de influência $[T]$ se torna,

neste caso, uma matriz identidade. O sistema global final para uma estrutura apoiada sobre o solo pode ser dada então por:

$$\begin{bmatrix} [K_d] & [A] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

7 Aplicações

Os métodos de análise e formulações bem como o método de acoplamento entre o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno são apresentados nos capítulos anteriores e verificados neste através dos exemplos de placas retangular e circular apoiadas sobre solo isotrópico sob efeito de carregamento estático e dinâmico harmônico, além de poços de grande diâmetro. A formulação de elementos finitos desenvolvida no capítulo 5 é validada de acordo com o uso em cada exemplo.

Primeiramente se investiga o comportamento de uma placa flexível retangular sobre uma base elástica sob um carregamento estático. Em seguida, analisa-se também uma placa retangular, porém o carregamento é dinâmico. Por último é feita a análise de poços de grande diâmetro para tipos diferentes de carregamento, inclusive o carregamento sísmico. As validações do modelo do poço são feitas para o caso em que a altura da parede do poço tende a zero e a estrutura se torna simplesmente uma placa circular na superfície e também para o caso em que a altura do poço é muito maior que seu diâmetro e portanto o comportamento se assemelha a uma estaca.

7.1 Placa Retangular sob Carregamento Estático

Uma placa retangular apoiada sobre o solo, representado na figura 15, se caracteriza como uma estrutura apoiada sobre um semi-espaco, ou seja, é um caso característico do exemplo desenvolvido no capítulo anterior. Assim, o sistema acoplado pode ser dado pela equação 6.15.

$$\begin{bmatrix} [K_d] & [A] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

O problema estático pode ser considerado um caso particular do problema dinâmico, isso se verifica a partir da consideração de um carregamento no qual sua frequência circular ω é zero. Portanto, tem-se a seguinte situação:

$$\begin{aligned} [K_d] &= [K] - \omega^2 [M] \\ [K_d] &= [K] - 0^2 [M] \\ [K_d] &= [K] \end{aligned} \tag{7.1}$$

A matriz representada por $[K_d]$ no sistema acoplado se resume somente à matriz de rigidez global $[K]$. A matriz de massa global $[M]$ do elemento não é necessária no caso de

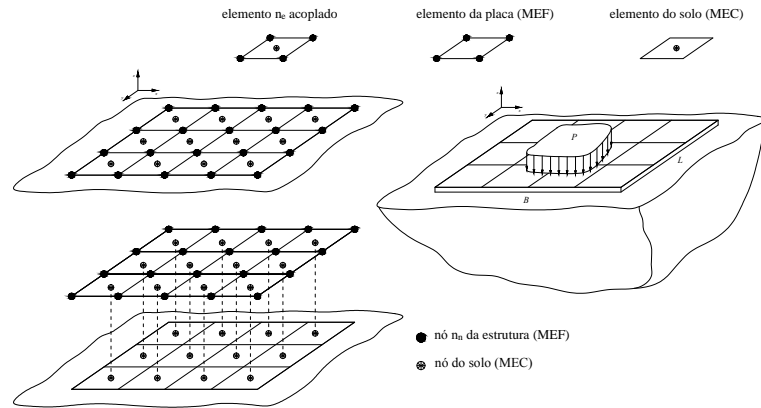


Figura 15 – Placa retangular apoiada sobre a superfície: discretização da placa (MEF), do solo (MEC) e acoplamento.

carregamento estático como é possível se verificar acima. Portanto, o sistema acoplado para uma carga estática, é expresso por:

$$\begin{bmatrix} [K] & [A] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

A modelagem é feita com n_e número de elementos e n_n número de nós. Cada nó do elemento finito retangular apresenta 3 graus de liberdade, o que resulta em um total de $3n_n$ graus de liberdade no sistema global. Desconsidera-se o efeito da tensão horizontal na interface solo-estrutura, assim, a tensão cisalhante entre o solo e a placa é zero. Note-se que a formulação de elementos finitos desenvolvida para o exemplo de placa retangular na seção 4.1 não contempla os graus de liberdade relativos à direção horizontal, somente o efeito de flexão é considerado. Dessa forma, somente a função de influência para deslocamentos verticais é importante para esse tipo de análise e consequentemente a matriz de influência $[U]$ tem tamanho $n_e \times n_e$.

A montagem da matriz de rigidez global $[K]$, de tamanho $3n_n \times 3n_n$, é dada a partir da determinação da matriz de rigidez para um elemento retangular, a qual é apresentada na seção 4.1. Como validação da formulação de elementos finitos de placa retangular, apresenta-se no gráfico 17 a comparação dos resultados dos deslocamentos obtidos a partir da formulação desta dissertação com o trabalho de Paiva (1987), o qual apresenta uma formulação através do MEC e também a solução analítica para flexão de placas delgadas. O exemplo do gráfico 17 é de uma placa quadrada simplesmente apoiada em todos os lados, uma malha de 20×20 elementos quadrados, submetida a um carregamento uniforme, onde se medem os deslocamentos, de acordo com a figura 16.

A matriz de influência $[U]$, para o caso estático, não é apresentada no capítulo 5. Para sua determinação é utilizada a solução de Boussinesq para o cálculo do deslocamento em um ponto no semi-espaço devido a uma carga concentrada na superfície. O deslocamento

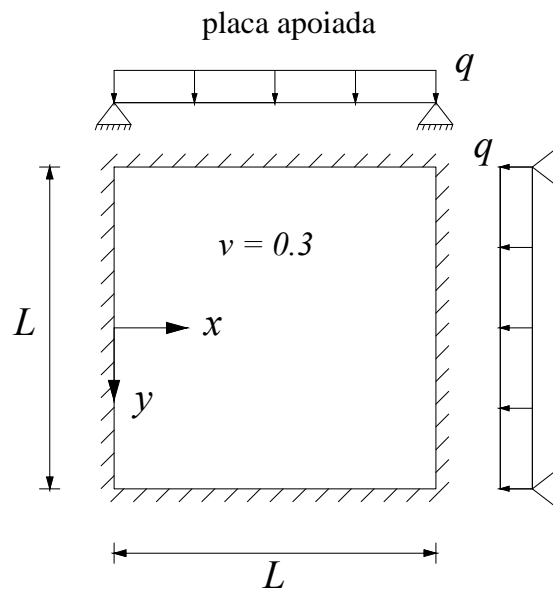


Figura 16 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme q .

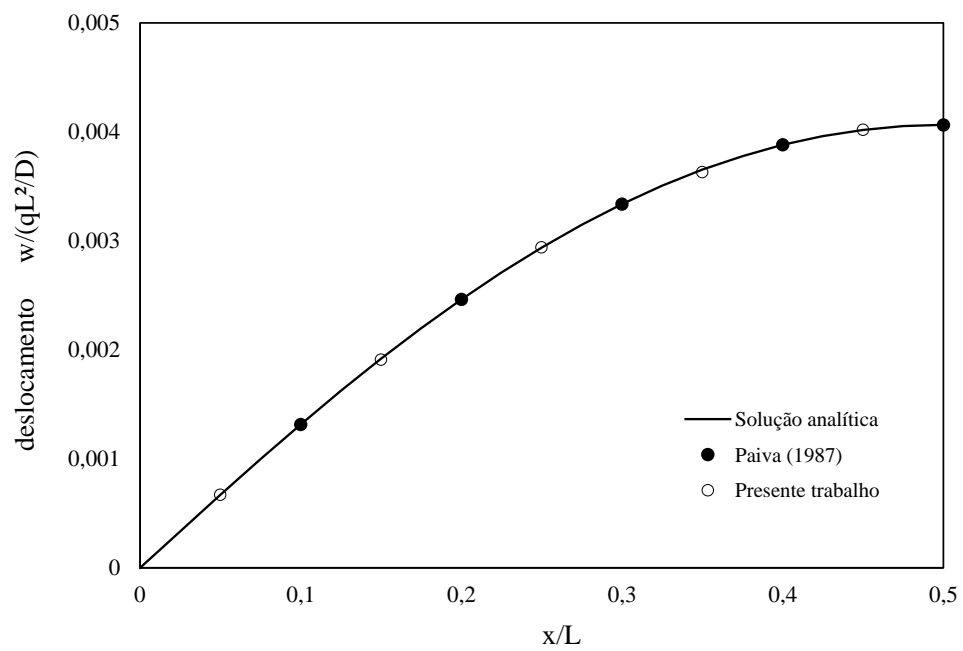


Figura 17 – Placa quadrada simplesmente apoiada submetida a um carregamento uniforme distribuído: deslocamento transversal ao longo do eixo de simetria.

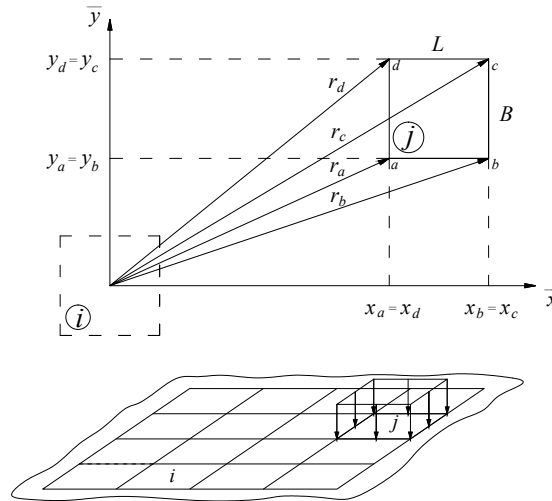


Figura 18 – Coordenadas e distâncias entre os elementos i e j para o cálculo do recalque.

vertical na superfície devido a uma carga pontual P , de acordo com a solução de Boussinesq encontrada em Timoshenko e Goodier (1951), é expresso por:

$$\rho_v = \frac{P}{\pi r} \frac{1 - \nu^2}{E} \quad (7.3)$$

onde ρ é o deslocamento vertical devido a uma carga P , r é a distância entre a carga P e o ponto de medição do recalque ρ_v , ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de elasticidade.

A solução da equação 7.3 seria equivalente à uma função de Green para deslocamento vertical, pois se encontra a solução do deslocamento para uma carga pontual. Portanto, para se obter a função de influência do deslocamento vertical na superfície devido a um carregamento distribuído uniformemente na superfície à uma distância r , basta integrar a equação 7.3 em uma área retangular de lados L e B nas direções x e y de acordo com os parâmetros apresentados na figura 18.

$$\begin{aligned} u_z &= \int_{x_a}^{x_a+L} \int_{y_a}^{y_a+B} \frac{P}{\pi r} \frac{1 - \nu^2}{E} \\ u_z &= \int_{x_a}^{x_a+L} \int_{y_a}^{y_a+B} \frac{P}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ u_z &= \frac{P}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \int_{x_a}^{x_a+L} \int_{y_a}^{y_a+B} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

O deslocamento vertical causado por uma carga uniformemente distribuída em uma área retangular com dimensões L e B na superfície do semi-espço, em um ponto qualquer da superfície do semi-espço a uma distância r é dado então por:

$$u_z = \frac{P}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \Omega \quad (7.5)$$

$$\Omega = \left[x_a \ln \frac{(y_a + r_a)(y_c + r_c)}{(y_b + r_b)(y_d + r_d)} + y_a \ln \frac{(x_a + r_a)(x_c + r_c)}{(x_b + r_b)(x_d + r_d)} + B \ln \frac{(x_c + r_c)}{(x_d + r_d)} + L \ln \frac{(y_c + r_c)}{(y_b + r_b)} \right]$$

de acordo com a figura 18 e a função de influência encontrada em 7.5 é possível encontrar o deslocamento vertical em um elemento i para uma carga distribuída uniforme aplicada no elemento j para uma carga P unitária. Assim obtém-se então a matriz de influência $[U]$ de tamanho $n_e \times n_e$.

$$U_{ij} = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \nu^2}{E} \Omega \quad (7.6)$$

Assim, o deslocamento u_i no centro do elemento i , devido a tensão aplicada t_j uniforme no elemento j é expresso por:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_e} U_{ij} t_j \quad (7.7)$$

$$\{u\} = [U] \{t\} \quad (7.8)$$

onde o vetor de reação vertical do solo $\{t\}$ tem tamanho $n_e \times 1$, ou seja uma tensão vertical uniforme para cada elemento do sistema. As diretrizes para o cálculo das matrizes de transformação $[A]$ e $[D]$ são apresentadas no capítulo 6, o tamanho dessas matrizes é, respectivamente $3n_n \times n_e$ e $n_e \times 3n_n$. O vetor $\{P_0\}$ é o vetor de cargas externas nodais e tem tamanho $3n_n \times 1$. O vetor de deslocamentos e rotações nodais $\{w_0\}$ tem tamanho $3n_n \times 1$ e é expresso por:

$$\{w_0\} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \vdots \\ w_{n_n} \\ \theta_{xn_n} \\ \theta_{yn_n} \end{pmatrix}_{3n_n \times 1}$$

O sistema global de placa retangular sob carregamento estático, incluindo as dimensões dos vetores e das matrizes é expresso por:

$$\begin{bmatrix} [K]_{3n_n \times 3n_n} & [A]_{3n_n \times n_e} \\ [D]_{n_e \times 3n_n} & -[U]_{n_e \times n_e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\}_{3n_n \times 1} \\ \{t\}_{n_e \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\}_{3n_n \times 1} \\ \{0\}_{n_e \times 1} \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

A validação do modelo de placa retangular apoiada sobre um semi-espaco elástico submetida a um carregamento estático é feita quando se compara os resultados obtidos neste

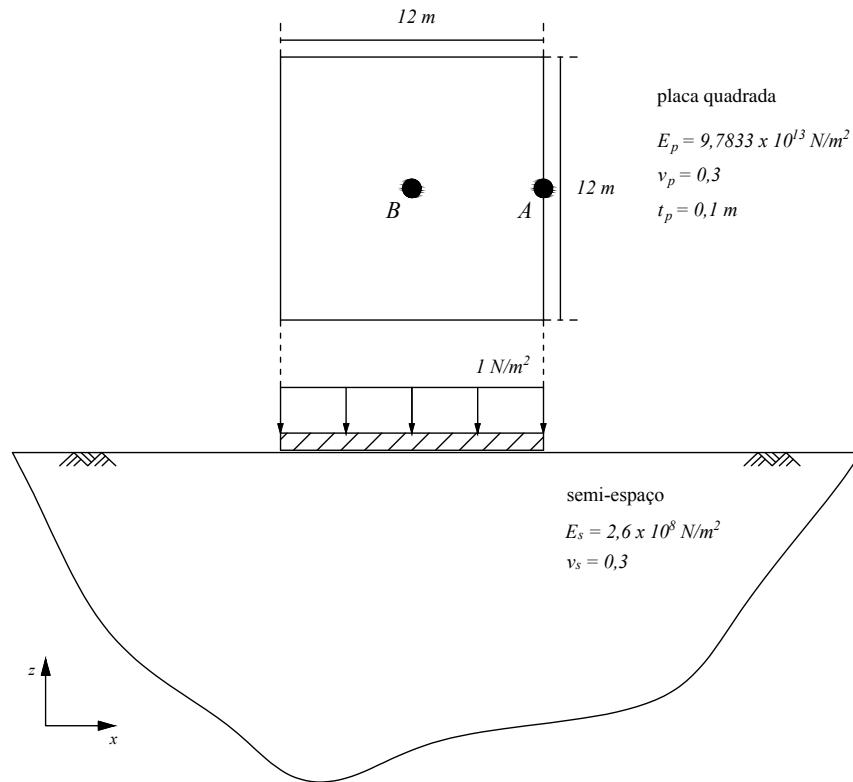


Figura 19 – Exemplo de placa quadrada apoiada sobre o solo adotado por [Ribeiro e Paiva \(2015\)](#).

trabalho com aqueles expressos em [Ribeiro e Paiva \(2015\)](#) através do gráfico 20. O exemplo é uma placa quadrada apoiada sobre o solo considerado um espaço semi-infinito de acordo com o que ilustra a figura 19. Os lados têm dimensão $L = 12 \text{ m}$, o módulo de elasticidade da placa $E_p = 9,7833 \times 10^{13} \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu_p = 0,3$, espessura da placa $t_p = 0,1 \text{ m}$ e um carregamento externo distribuído uniforme unitário $q = 1 \text{ N/m}^2$ por toda a área da placa. As características do solo são dadas pelo módulo de elasticidade $E_s = 2,6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu_s = 0,3$.

A diferença entre os resultados ocorre por conta da formulação diversa entre os métodos empregados e pela malha escolhida em cada caso. O trabalho de [Ribeiro e Paiva \(2015\)](#) utiliza soluções de espaço completo para a simulação do solo, portanto necessita-se discretizar o contorno além da superfície onde a placa é apoiada e para se evitar erros numéricos de truncamento, adota-se elementos de contorno infinitos. Os elementos finitos para a simulação da placa são triangulares e levam em conta o efeito de membrana, além dos nós dos elementos de contorno e dos elementos finitos coincidirem. Por outro lado, a solução apresentada aqui é de semi-espaco para a simulação do solo e se utilizam elementos retangulares, os quais consideram somente o efeito de flexão, para a discretização da placa. Ademais, os nós dos elementos finitos e dos elementos de contorno, neste trabalho, não coincidem, necessitando de matrizes de transferência, como por exemplo as matrizes $[A]$ e $[D]$, para que seja possível a compatibilidade entre os métodos. Utiliza-se uma malha de elementos quadrados com 400 elementos (20×20)

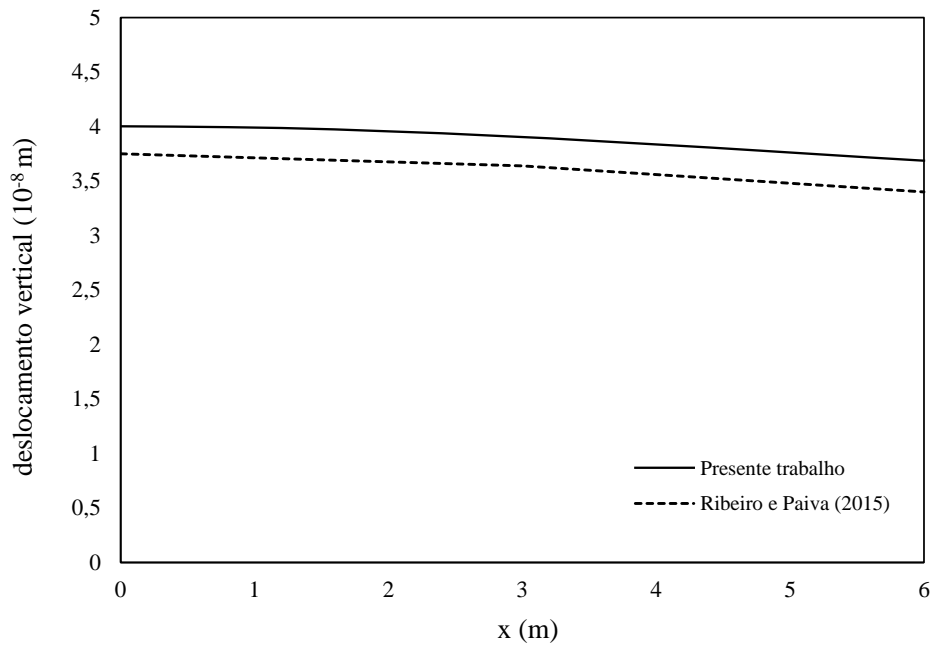


Figura 20 – Deslocamento vertical do centro B da placa ao ponto A ($L = 12\text{ m}$, $E_p = 9,7833 \times 10^{13}\text{ N/m}^2$, $\nu_p = 0,3$, $t_p = 0,1\text{ m}$, $q = 1\text{ N/m}^2$, $E_s = 2,6 \times 10^8\text{ N/m}^2$, $\nu_s = 0,3$).

Tabela 2 – Deslocamento no centro e no canto da placa para diferentes malhas.

Malha	w_{centro}	w_{borda}
4×4	0,0918	0,0846
6×6	0,0915	0,0827
8×8	0,0915	0,0827
10×10	0,0914	0,0817
12×12	0,0912	0,0808
18×18	0,0911	0,0801
20×20	0,0911	0,0800

considerando somente o efeito da flexão de placa. Já o trabalho de [Ribeiro e Paiva \(2015\)](#) utiliza uma malha com elementos triangulares com 32 elementos para discretização da placa e considera-se, além do efeito de flexão, o efeito de membrana, justificando assim uma rigidez maior do sistema e portanto um deslocamento menor.

A malha utilizada nos exemplos de placa retangular tem 20×20 elementos quadrados devido a conversão obtida para diferentes malhas, como apresentado na tabela 2. Mede-se os deslocamentos no centro da placa w_{centro} e na borda w_{borda} a partir de uma linha reta partindo do centro e paralela ao lado da placa. Aplica-se um carregamento distribuído unitário estático. Os coeficientes de Poisson do solo ν_s e da placa ν_p são adotados como tendo o mesmo valor, a espessura $t = 0,1$, os lados $L_x = L_y = 1$, a relação entre os módulos de elasticidade da placa e do solo é dada por $E_p/E_s = 1000$.

Estuda-se também o caso de uma placa infinitamente rígida apoiada como ilustrado na figura 21. Para essa consideração não é necessária a discretização da placa em elementos finitos, somente a discretização da interface solo-estrutura em elementos de contorno é requerida,

pois no sistema global 7.2, o vetor $\{w_0\}$ de deslocamentos e rotações nodais se resumem a apenas um deslocamento vertical por toda a região da placa. Assim, através da matriz de influência obtida a partir da equação 7.5 e por uma simples análise de equilíbrio de forças, é possível obter-se o deslocamento vertical w_r e também a distribuição de pressão do solo $\{t\}$ em cada elemento de contorno devidos a uma carga externa. Assim para uma carga P externa aplicada a uma placa rígida na superfície, a reação do solo, que para o caso de uma estrutura apoiada na superfície do semi-espço é igual a distribuição das tensões na superfície do semi-espço, o equilíbrio estático pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P - R &= 0 \\ P - Sq &= 0 \\ P &= Sq \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde P é uma carga externa aplicada à estrutura, R é a reação do solo, S é a área total da placa e q é a reação do solo. A distribuição de tensão do solo q por toda extensão da placa não é uniforme, já que o deslocamento é uniforme. Dividindo-se a interface solo-estrutura em n_e elementos de contorno, a área total S pode ser dada pelo somatório da área de todos os elementos s_i em que a interface foi dividida. A parcela de tensão no solo t_i por elemento é adotada uniforme no próprio elemento e o conjunto das distribuições t_i por elemento formam a distribuição q total por toda a área da placa. Logo:

$$q = \{t\} \quad (7.11)$$

$$S = \sum_{i=1}^{n_e} s_i \quad (7.12)$$

$$P = \sum_{i=1}^{n_e} s_i t_i \quad (7.13)$$

As equações são expressas na forma matricial da seguinte maneira:

$$P = \{S\} \{t\} \quad (7.14)$$

onde $\{S\}$ é o vetor linha representando a área de cada elemento de contorno e $\{t\}$ é o vetor coluna da tensão do solo, no qual cada elemento do vetor representa a tensão distribuída uniforme t_i dentro do elemento de contorno i . A matriz relativa às funções de influência $[U]$ é calculada da mesma maneira que apresentado em 7.6. Como o deslocamento w_r é uniforme por toda a placa, chega-se então a:

$$w_r = [U] \{t\} \quad (7.15)$$

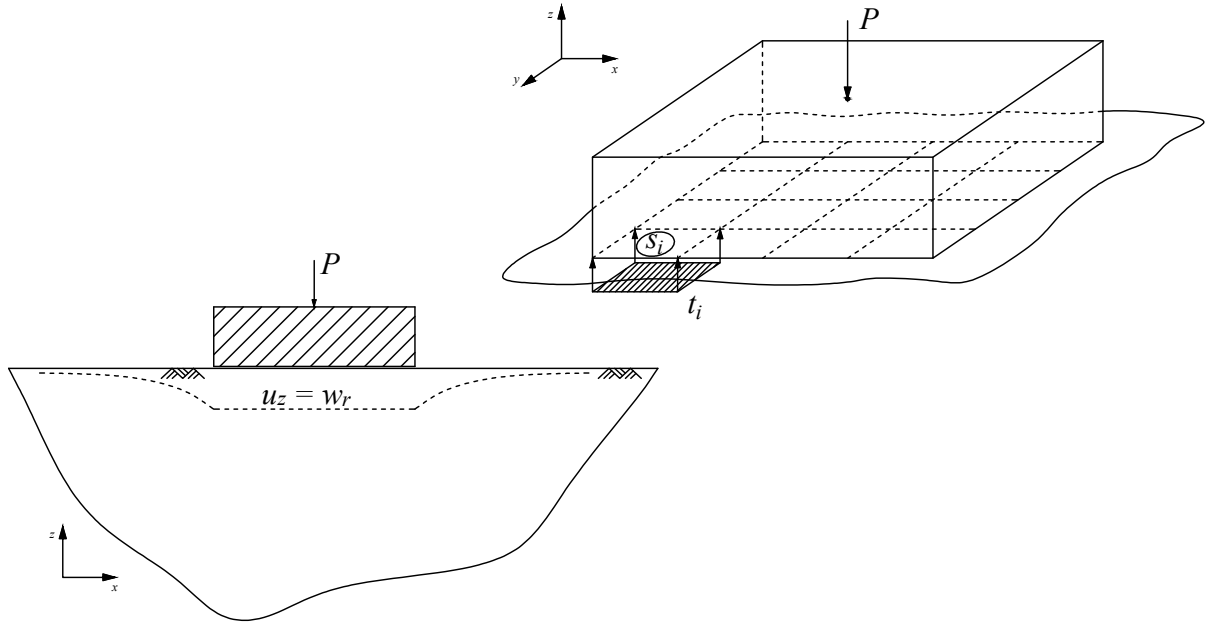


Figura 21 – Placa perfeitamente rígida apoiada sobre o solo.

Unindo-se as equações 7.14 e 7.15 em um sistema linear, chega-se a uma solução para o deslocamento w_r e a distribuição de tensão t_i em cada elemento, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 0 & \{S\} \\ \{1\} & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r \\ \{t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.16)$$

onde $\{1\}$ é um vetor coluna unitário de tamanho $n_e \times 1$ e P é a resultante da carga total externa aplicada sobre a placa.

Apresenta-se a seguir o deslocamento relativo de uma placa quadrada apoiada sobre o solo para um carregamento distribuído uniforme unitário sobre a placa para diferentes rigidezes relativas. A rigidez relativa é expressa através do fator adimensional β_a , relacionando o módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson do solo e da placa e é expressa por:

$$\beta_a = \frac{1 - \nu_p^2}{1 - \nu_s^2} \frac{E_s}{E_p} \frac{L_x^2 L_y}{t_p^3}$$

onde ν_p é o coeficiente de Poisson da placa, ν_s é o coeficiente de Poisson do solo, E_p é o módulo de elasticidade da placa, E_s é o módulo de elasticidade do solo, L_x e L_y são os lados da placa e t_p é a espessura da placa.

O gráfico 22 mostra resultados de uma placa em que os coeficientes de Poisson do solo ν_s e da placa ν_p são adotados como tendo o mesmo valor, a espessura $t = 0,1$ e os lados $L_x = L_y = 1$ (adimensionais) e utiliza-se diferentes valores para a rigidez relativa β_a alterando os módulos de elasticidade da placa e do solo, de forma que sejam as grandezas significativas da

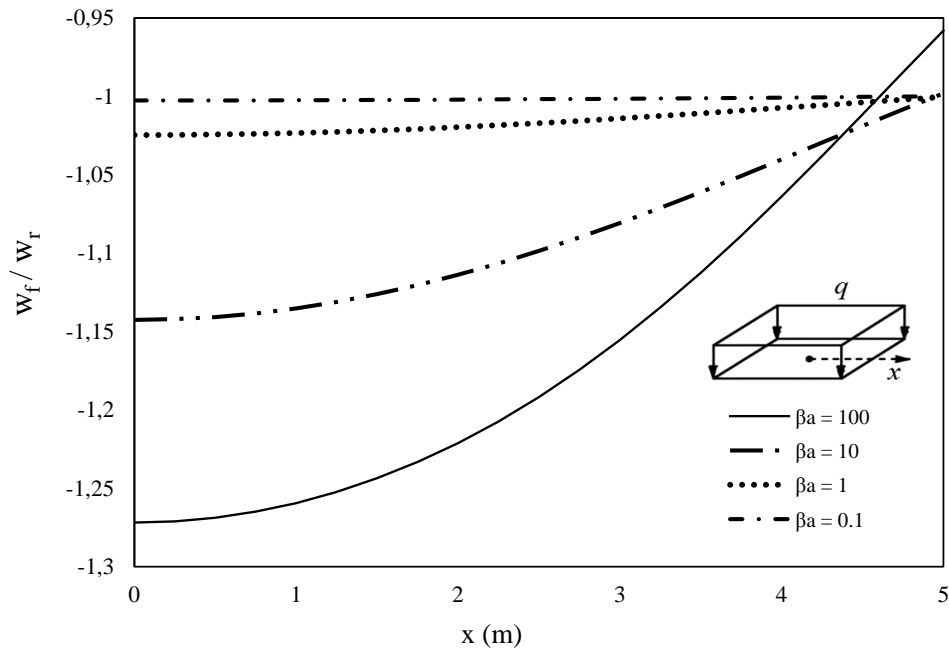


Figura 22 – Placa quadrada apoiada sobre um semi-espaço elástico submetida a um carregamento uniforme estático.

análise. A malha utilizada é de 400 elementos quadrados. Os deslocamentos são expressados por meio de um adimensional. Esse adimensional relaciona o deslocamento w_f de uma placa para uma certa rigidez com o deslocamento w_r desta mesma placa para uma rigidez infinita.

7.2 Placa Retangular sob Carregamento Dinâmico

O sistema acoplado MEF-MEC para uma placa retangular sobre o solo, como encontrado no trabalho de [Guerra, Barros e Pavanello \(2017\)](#), pode ser expresso de acordo com o desenvolvimento apresentado na seção 6.3 e também na seção anterior 7.1, portanto:

$$\begin{bmatrix} [K_d] & [A] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

onde $[K_d] = [K] - \omega^2 [M]$. As matrizes de rigidez global $[K]$, de massa global $[M]$, de acoplamento $[D]$ e $[A]$ são calculadas da mesma maneira apresentada nas seções 6.3 e 7.1, inclusive os tamanhos das matrizes e vetores do sistema linear são iguais ao caso estático. Observa-se também que a formulação do MEF usada nesta aplicação é validada na seção anterior.

A principal dificuldade para a análise de uma placa sob a ação de carregamento dinâmico está em calcular a matriz de influência $[U]$, que para um carregamento dinâmico apresenta uma formulação diferente do que aquela dada para um carregamento estático em 7.6.

A matriz $[U]$ é obtida através do uso de funções de influência calculadas na seção 5.3 expressas pelas equações 5.79 e 5.80, ou seja, funções de influência para um disco de carga. Utiliza-se, porém, somente a equação 5.80, pois considera-se somente o efeito na direção ver-

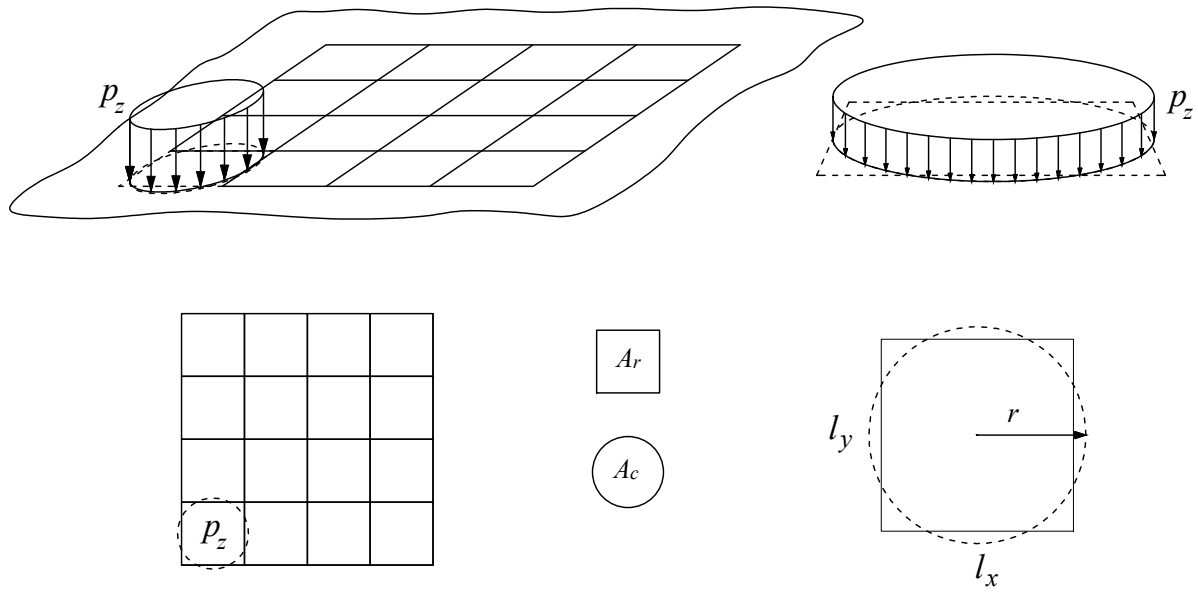


Figura 23 – Disco de carga equivalente a um retângulo.

tical e desconsidera os efeitos nas outras direções. O desenvolvimento de funções de influência para um carregamento dinâmico distribuído em um retângulo é muito mais complexo matematicamente se comparado a um disco de carga, portanto substitui-se o carregamento retangular, de acordo com a figura 23, por um disco de carga de raio equivalente a um retângulo de mesma área através da seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \pi r^2 \\
 A_r &= l_x l_y \\
 A_c &= A_r \\
 r &= \sqrt{\frac{l_x l_y}{\pi}}
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

onde A_c área de um disco, A_r área de um retângulo, r raio equivalente, l_x e l_y lados de um retângulo. Transformar elementos retangulares em elementos circulares equivalentes envolve um erro. Dependendo da relação entre os lados do elemento, o erro aumenta, afetando assim o resultado final. Mas se for escolhido um elemento retangular adequado com a relação entre os lados l_x/l_y de 1,5 ou menos, este erro pode ser extremamente baixo, sem influenciar efetivamente os resultados finais. Para se minimizar o erro do resultado final, se escolhe somente elementos quadrados na modelagem.

Após elucidar como se obter todos os elementos do sistema global 7.17, é possível fazer a validação da formulação comparando-se os resultados obtidos com o trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#) e também com o trabalho de [Auersch \(1996\)](#) que abordam o mesmo tema desta seção. Ambos trabalhos utilizam o MEC com soluções de semi-espaco isotrópico elástico para

caracterizar o comportamento do solo e utilizam o MEF para discretizar a estrutura da placa, porém o acoplamento é feito de maneiras diferentes.

Primeiramente se compara os resultados deste trabalho com o trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#), para tanto é necessário destacar como são apresentados os resultados no artigo para que se possa fazer a comparação. Os resultados são apresentados na sua forma normalizada, assim, é necessário mostrar os adimensionais utilizados na análise, como: rigidez relativa, fator de massa e frequência adimensional. A rigidez relativa é expressa através do fator adimensional γ_a , relacionando os módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson do solo e da placa da seguinte maneira:

$$\gamma_a = 180\pi \frac{1 - \nu_p^2}{1 - \nu_s^2} \frac{E_s}{E_p} \frac{L_x^2 L_y}{t_p^3} \quad (7.19)$$

onde ν_p é o coeficiente de Poisson da placa, ν_s é o coeficiente de Poisson do solo, E_p é o módulo de elasticidade da placa, E_s é o módulo de elasticidade do solo, L_x e L_y são os lados da placa e t_p é a espessura da placa. O fator de massa B_z é expresso por:

$$B_z = \frac{m}{\rho_s \left(\frac{L_x}{2}\right)^2 \left(\frac{L_y}{2}\right)} \frac{1 - \nu_s}{4\alpha_f} \quad (7.20)$$

onde m é a massa total da placa, ρ_s é a densidade do solo, ν_s é o coeficiente de Poisson do solo, L_x e L_y são os lados da placa e α_f é o fator de forma, que para placas quadradas tem o valor de 1,065. A frequência adimensional a_0 é dada por:

$$a_0 = \frac{L_x}{2} \frac{\omega}{c_s} \quad (7.21)$$

onde ω é a frequência circular do carregamento dinâmico e c_s é a velocidade de onda de cisalhamento no solo e pode ser expressa por:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}} \quad (7.22)$$

onde μ é a constante de Lamé dada pela equação 3.15, também chamada de módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento e ρ_s é a densidade do solo.

As figuras 24 e 25 consistem da análise de uma placa quadrada para um carregamento harmônico pontual P no centro geométrico da placa. Os lados L_x e L_y têm valor unitário, os valores de frequência adimensional a_0 variam de 0 a 1 e o fator de massa B_z adotado é igual a 2. Escolhem-se três diferentes rigidezes relativas γ , são elas: $\log \gamma = 0,36$, $\log \gamma = 3,36$ e $\log \gamma = 4,27$. Observa-se que quanto maior o valor da rigidez relativa γ , maior é a flexibilidade da placa. A malha adotada é de 20×20 elementos quadrados.

Mede-se então o fator de magnificação V_m no centro da placa e o fator de magnificação V_e no canto da placa. O fator de magnificação V_m ou V_e é um adimensional adotado para representar o deslocamento. Esse fator é a amplitude do deslocamento na direção z para uma certa rigidez relativa devido a uma certa carga dinâmica P dividido pelo deslocamento de uma

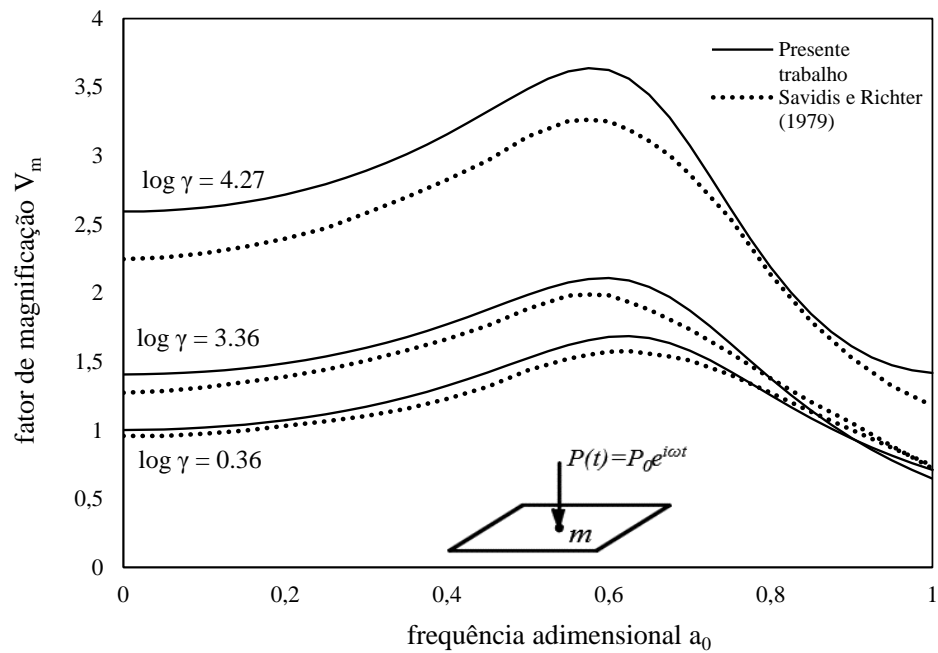


Figura 24 – Comparação com o trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#) para deslocamento no centro da placa.

placa perfeitamente rígida submetida a mesma carga P porém estática, lembrando-se que o deslocamento de uma placa perfeitamente rígida para o caso estático é obtido a partir do sistema linear 7.16.

As duas formulações conduzem a um comportamento similar para uma carga dinâ-

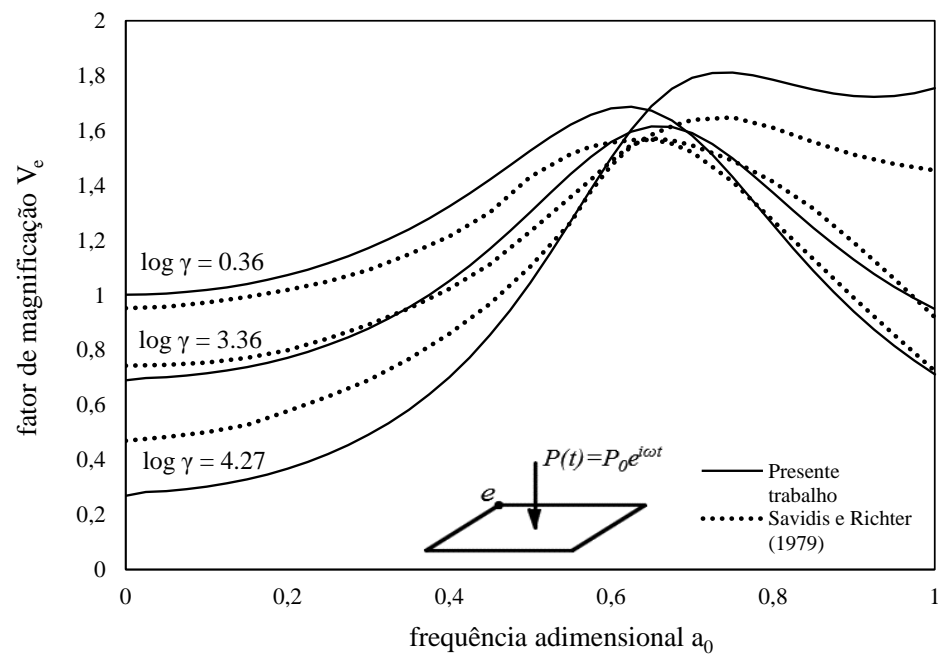


Figura 25 – Comparação com o trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#) para deslocamento no canto da placa.

mica. Para a placa rígida os resultados são próximos, mas quanto mais se aumenta a flexibilidade da placa, mais distante é o resultado.

Compara-se então o modelo de interação solo-estrutura utilizado neste trabalho à formulação do trabalho de [Auersch \(1996\)](#). Diferentemente do trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#), em [Auersch \(1996\)](#) os resultados não são apresentados a partir de adimensionais, mas sim para valores encontrados na prática para os materiais que compõem o solo e a estrutura da placa. Dessa forma comparam-se os resultados obtidos em dois gráficos distintos, ambos medem a amplitude do deslocamento no centro de uma placa quadrada, devido a uma carga dinâmica harmônica pontual unitária no centro da placa, para diferentes valores de frequência do carregamento.

A diferença entre os gráficos é que no primeiro gráfico [26](#), a placa apresenta uma espessura $t_p = 0,25$ m fixa e obtêm-se as curvas para diferentes valores de velocidade da onda cisalhante no solo c_s , ou seja, altera-se o valor da onda cisalhante c_s de forma a se analisar diversos tipos de solo. Os valores de c_s adotados são: 100 m/s, 150 m/s, 200 m/s e 300 m/s. A malha adotada é de 20×20 elementos quadrados.

O gráfico [27](#) fixa o valor da velocidade da onda cisalhante c_s em 200 m/s e variam-se os valores da espessura t_p da placa. O objetivo deste gráfico é analisar diferentes rigidezes da fundação para um mesmo tipo de solo. As espessuras adotadas são: 0,15 m, 0,25 m e 0,50 m.

Os parâmetros adotados, que não se alteram para obtenção de ambos os gráficos, são os seguintes: lados da placa $L_x = L_y = 5$ m, densidade da placa $\rho_p = 2500 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidade da placa $E_p = 3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson da placa $\nu_p = 0,15$, densidade do solo $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ e coeficiente de Poisson do solo $\nu_s = 0,33$. A malha adotada é de 20×20 elementos quadrados.

Nota-se que os resultados deste trabalho se aproxima mais dos resultados apresentados por [Auersch \(1996\)](#), pois, a partir dos gráficos obtidos, as curvas se aproximam mais do que no trabalho de [Savidis e Richter \(1979\)](#). Uma das possíveis razões para tal diferença se encontra no fato do acoplamento apresentado por [Savidis e Richter \(1979\)](#) ter um diferente tratamento nas bordas da interface solo-fundação, enquanto que em [Auersch \(1996\)](#) o acoplamento é feito de forma mais similar à aquela apresentada aqui.

Assim como na seção anterior que apresenta o deslocamento devido a um carregamento estático para uma placa perfeitamente rígida, é possível se obter a solução do deslocamento para o caso de um carregamento dinâmico. O processo para o desenvolvimento do sistema linear final para uma placa infinitamente rígida sob o efeito de uma carga dinâmica é muito semelhante ao sistema linear final [7.16](#) obtido na seção anterior. Assim como no caso estático, pode-se prescindir do uso do MEF para a discretização da placa, como apresentado na figura [21](#), e através do equilíbrio dinâmico (figura [28](#)) e da matriz de influência, chega-se ao valor do deslocamento $w_r(t)$ para o caso dinâmico. Para uma carga $P(t)$ harmônica, o equilíbrio dinâmico pode ser dado por:

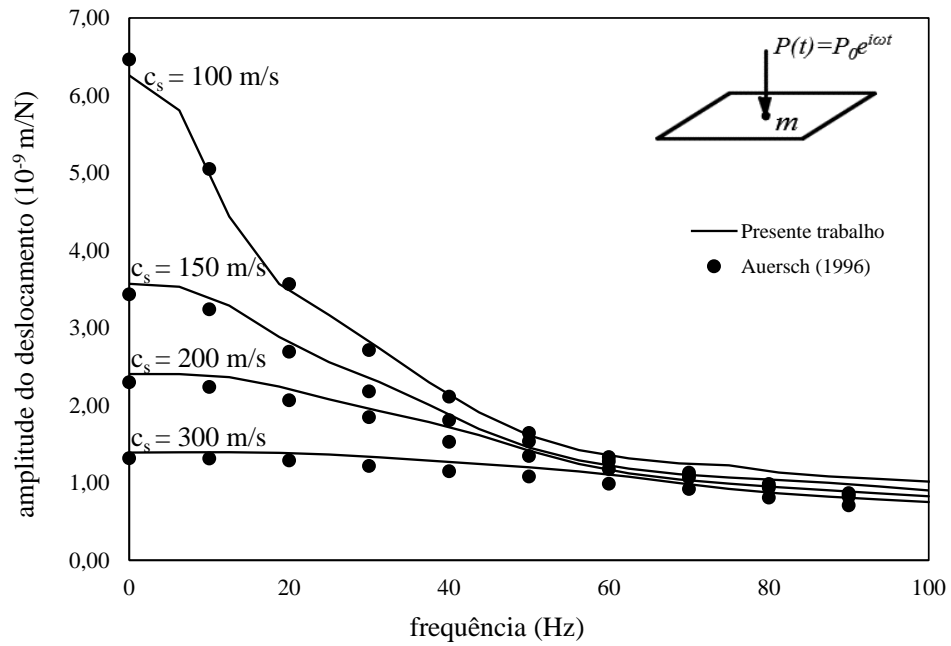


Figura 26 – Amplitudes para uma placa de espessura $t_p = 0,25$ m e diferentes valores de velocidade de onda de cisalhamento do solo c_s ($L_x = L_y = 5$ m, $\rho_p = 2500$ kg/m³, $E_p = 3 \cdot 10^{10}$ N/m², $\nu_p = 0,15$, $\rho_s = 2000$ kg/m³, $\nu_s = 0,33$).

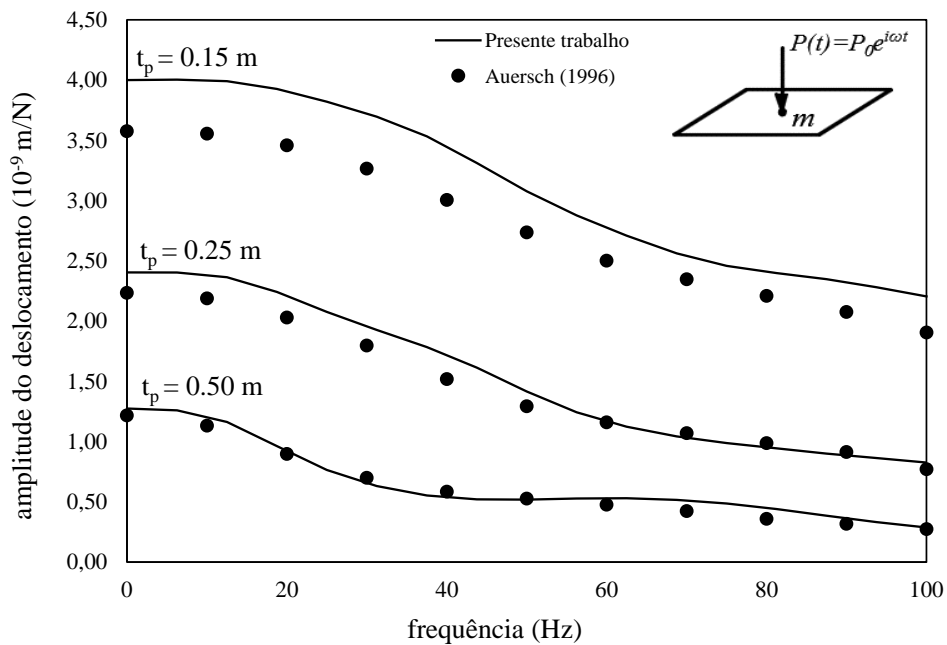


Figura 27 – Amplitudes para diferentes valores de espessura t_p da placa e velocidade de onda de cisalhamento do solo $c_s = 200$ m/s ($L_x = L_y = 5$ m, $\rho_p = 2500$ kg/m³, $E_p = 3 \cdot 10^{10}$ N/m², $\nu_p = 0,15$, $\rho_s = 2000$ kg/m³, $\nu_s = 0,33$).

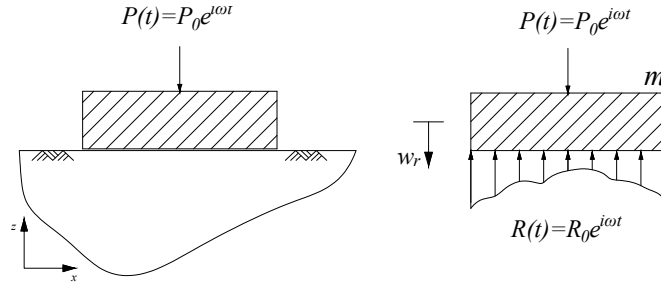


Figura 28 – Placa perfeitamente rígida: equilíbrio dinâmico.

$$\begin{aligned}
 P(t) - R(t) &= m \frac{\partial^2 w_r(t)}{\partial t^2} \\
 P e^{i\omega t} - R e^{i\omega t} &= m \frac{\partial^2 w_r(t)}{\partial t^2} \\
 P e^{i\omega t} - S q e^{i\omega t} &= m \frac{\partial^2 w_r(t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

onde P é o carregamento harmônico externo, R é a reação do solo, S é a área total da placa, q é a tensão de reação do solo na área da placa, m é a massa da placa. Uma solução particular da equação 7.23 não-homogênea pode ser da forma $w_r(t) = w_r e^{i\omega t}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 P e^{i\omega t} - S q e^{i\omega t} &= -m \omega^2 w_r e^{i\omega t} \\
 P - S q &= -m \omega^2 w_r
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

ou seja, é a mesma equação apresentada em 7.10 porém com a adição do termo relativo à inércia $-\omega^2 m$, pois o cálculo é feito para uma carga dinâmica. Após a divisão da interface solo-fundação como ilustrado na figura 21, a equação de equilíbrio dinâmico 7.24 pode ainda ser expressa na forma matricial:

$$\{S\} \{t\} - m \omega^2 w_r = P \tag{7.25}$$

onde $\{S\}$ é o vetor linha no qual cada elemento do vetor representa a área de cada elemento de contorno e $\{t\}$ é o vetor coluna representando a tensão do solo em cada elemento de contorno. Vale lembrar que cada elemento t_i do vetor é representado por uma distribuição uniforme dentro do próprio elemento de contorno i , porém o conjunto formado por cada elemento t_i do vetor $\{t\}$ origina a distribuição q que não é uniforme.

A matriz de influência $[U]$ é calculada da mesma maneira que o apresentado nesta seção, ou seja, através de discos de carga de mesma área que os retângulos dos elementos da interface solo-estrutura, como pode ser visto na equação 7.18, a qual é usada para se calcular um raio equivalente de forma a se obter o disco de carga. Assim:

$$w_r = [U] \{t\} \tag{7.26}$$

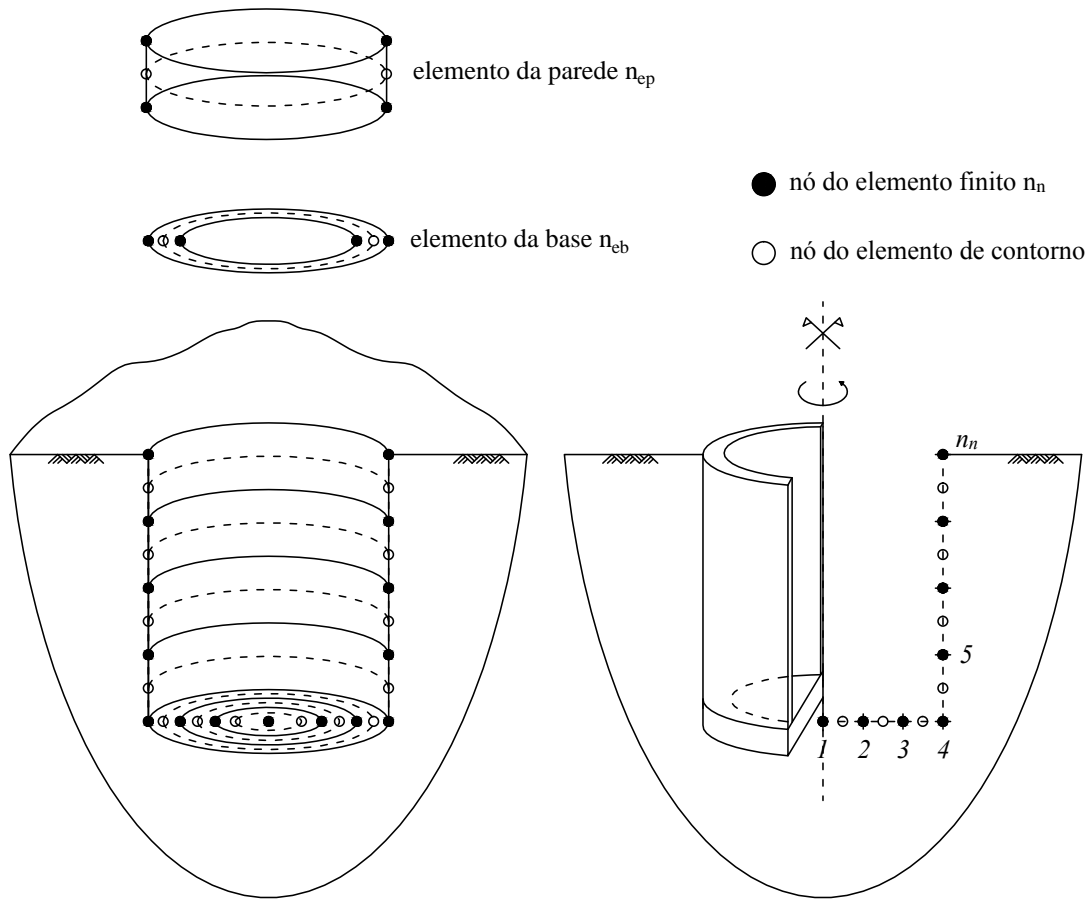


Figura 29 – Modelagem do poço: nós dos elementos finitos, nós dos elementos de contorno, elementos da base e elementos da parede.

Unindo-se as equações 7.25 e 7.26 em um sistema linear, chega-se a uma solução para se obter o deslocamento w_r e a reação do solo dado por $\{t\}$, da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 & \{S\} \\ \{1\} & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_r \\ \{t\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.27)$$

onde $\{1\}$ é um vetor coluna unitário de tamanho $n_e \times 1$ e P é a resultante da carga total externa aplicada sobre a placa.

7.3 Poços de Grande Diâmetro

Nesta seção chega-se ao objetivo principal deste trabalho, que é o estudo do comportamento de poços de grande diâmetro. Nas seções anteriores são apresentadas todas as equações e métodos, inclusive validações para que se possa atingir esse propósito. A estrutura do poço é considerada perfeitamente aderida ao meio elástico. Todos os casos estudados são poços circulares, de forma que seja possível se beneficiar das características axissimétricas do problema, assim, o desenvolvimento da modelagem é feito em coordenadas cilíndricas.

O estudo do poço é um caso similar ao de uma fundação semi-enterrada e considera-se as estruturas da parede e da laje de fundo como flexíveis. O acoplamento é obtido da mesma maneira que é apresentado em 6.14, isto é:

$$\begin{bmatrix} [K_d] & [A][T] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (7.28)$$

onde $[K_d] = [K] - \omega^2 [M]$. Assim, a modelagem segue os mesmos preceitos do que já foi apresentado. O poço é dividido em elementos finitos e elementos de contorno, os elementos do MEF e do MEC coincidem geometricamente, porém os nós dos elementos finitos são localizados nos extremos de cada elemento e os nós dos elementos de contorno são localizados no centro geométrico de cada elemento. Por esse motivo, se fazem necessárias as matrizes $[A]$ e $[D]$ que compatibilizam os dois métodos, sendo a matriz $[A]$ relativa à influência de um carregamento distribuído sobre os nós extremos do elemento e matriz $[D]$ relativa à influência de deslocamentos e rotações nodais no centro do elemento. A figura 29 ilustra a discretização do poço em elementos finitos, em elementos de contorno e também o acoplamento entre os métodos.

Assumindo que os deslocamentos verticais e radiais no centro dos elementos de contorno sobre o semi-espaco são iguais aos deslocamentos verticais e radiais no centro dos elementos finitos e que a tensão normal e cisalhante na interface entre o poço e o semi-espaco pode ser aproximada pela composição de cargas distribuídas uniformes, chega-se ao sistema global 7.28.

Como pode ser visto ainda na figura 29, a modelagem apresenta n_{eb} número de elementos da base e n_{ep} número de elementos da parede, onde o número total de elementos n_e é $n_e = n_{eb} + n_{ep}$. O número de nós total n_n é $n_n = n_e + 1$.

7.3.1 Elementos Finitos

Os elementos finitos utilizados para se calcular a matriz de rigidez global $[K]$ e a matriz de massa global $[M]$ são aqueles apresentados nas seções 4.2 e 4.3, ou seja, para a base se utiliza elementos finitos de placa circular e para a parede elementos finitos cilíndricos. Portanto cada nó relativo ao MEF tem 3 graus de liberdade, um deslocamento vertical u_z , um deslocamento radial u_r e uma rotação θ , exceto um dos nós do elemento de fechamento da base que apresenta apenas um grau de liberdade, o deslocamento vertical u_z .

Antes que se utilize as matrizes dos elementos finitos no sistema global final, é feita a validação do elemento finito de placa circular, do elemento finito cilíndrico e da combinação de ambos os elementos para simular um poço, porém, por ora, sem a influência do solo. Comparam-se as soluções obtidas neste trabalho às soluções analíticas para placa circular e para um cilindro e, através da modelagem utilizando programas comerciais de elementos finitos, compara-se a solução deste trabalho para a junção da placa circular e do cilindro que formam o poço. A figura 30 ilustra os casos a serem validados.

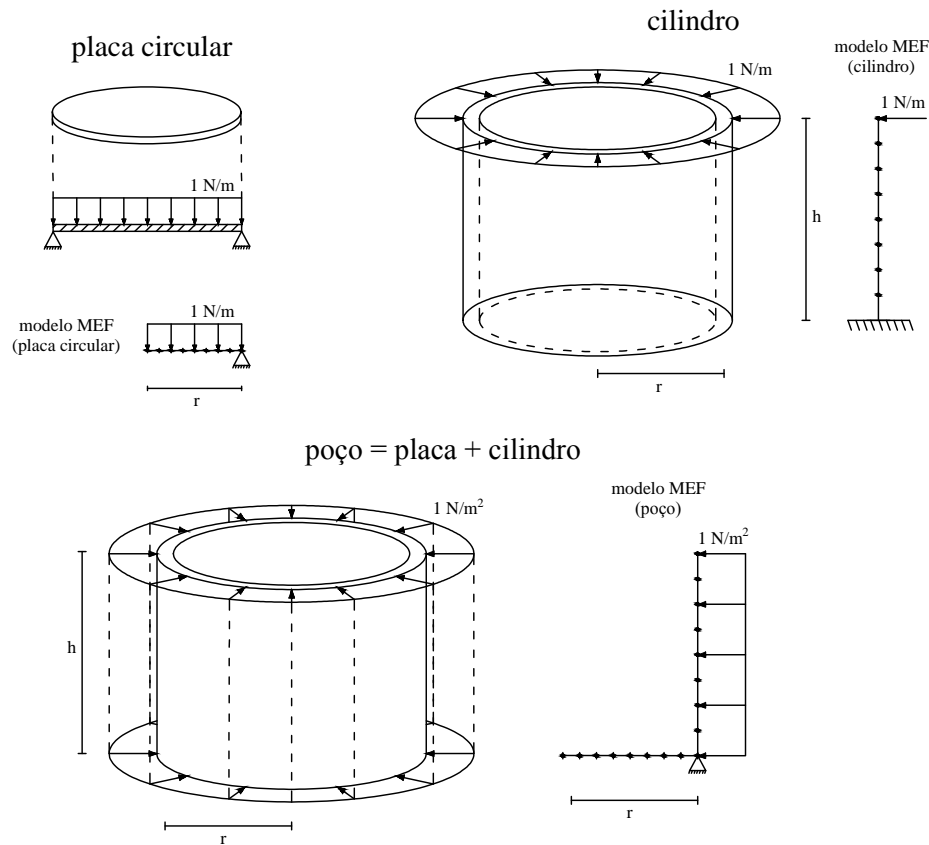


Figura 30 – Modelos de elementos finitos para a validação da formulação do MEF: placa circular, cilindro e poço.

A validação da formulação do elemento finito de placa circular é feita através do resultado expresso no gráfico da figura 31 para uma placa simplesmente apoiada de raio $r = 1 \text{ m}$, espessura $t_p = 0,1 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 1000 \text{ N/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$, sujeita a um carga uniforme distribuída vertical 1 N/m^2 . A malha é composta de 20 elementos de placa circular.

O exemplo para a validação do elemento finito de casca cilíndrica (figura 32) é dado através da simulação de um cilindro com a base engastada e um anel de carga de 1 N/m no topo na direção radial. As características do cilindro são as seguintes: módulo de elasticidade $E = 1000 \text{ N/m}^2$, espessura $t_c = 0,1 \text{ m}$, raio $r = 100 \text{ m}$, altura $h = 10 \text{ m}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,1$. A malha é composta de 20 elementos de casca cilíndrica.

Unindo-se então os modelos de placa circular e do cilindro, se obtém o modelo de elementos finitos para a estrutura do revestimento do poço. Para validar a formulação obtida, utilizam-se dois exemplos distintos. O primeiro exemplo compara a formulação deste trabalho à um modelo em três dimensões a partir do *software* SAP2000. Simula-se um poço com altura $h = 10 \text{ m}$, raio $r = 10 \text{ m}$, espessura da parede $t_c = 0,1 \text{ m}$, espessura da base $t_p = 0,1 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 1000 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e densidade $\rho = 20 \text{ kg/m}^3$, submetido a um carregamento estático distribuído uniformemente pela área da parede de intensidade 1 N/m^2 . O poço é simplesmente apoiado ao longo de todo o perímetro da região entre a

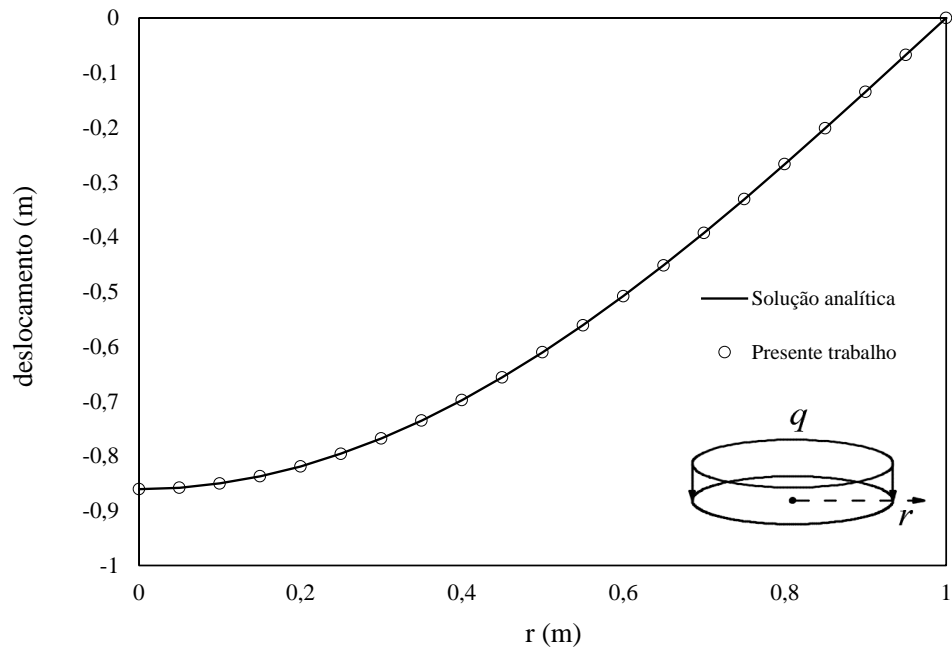


Figura 31 – Deslocamento vertical da placa circular na direção radial ($r = 1$ m, $t_p = 0,1$ m, $E = 1000$ N/m², $\nu = 0,1$, 1 N/m²).

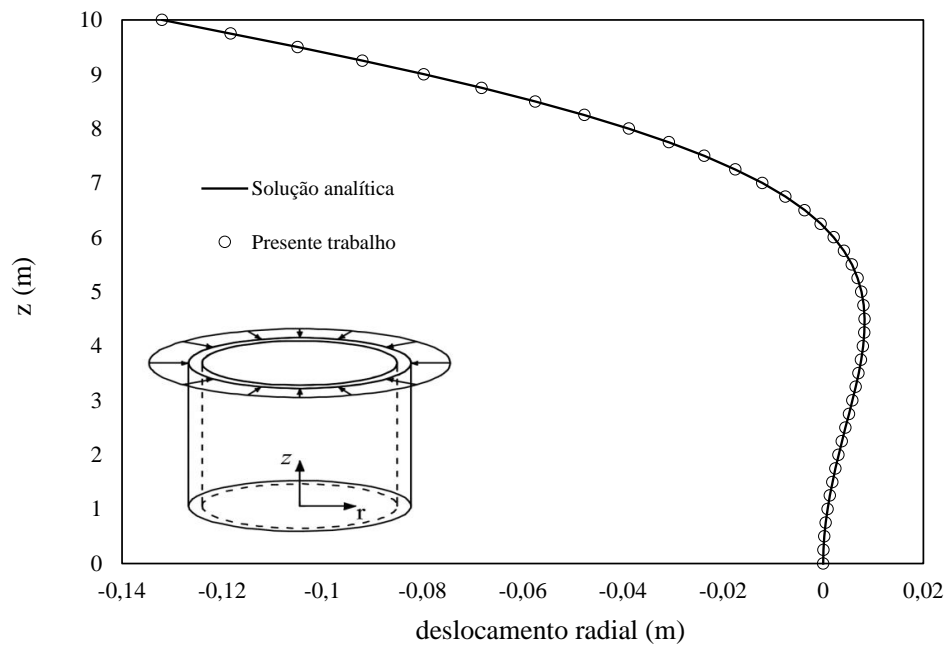


Figura 32 – Deslocamento radial ao longo do eixo da parede do cilindro ($r = 100$ m, $h = 10$ m, $t_c = 0,1$ m, $E = 1000$ N/m², $\nu = 0,1$).

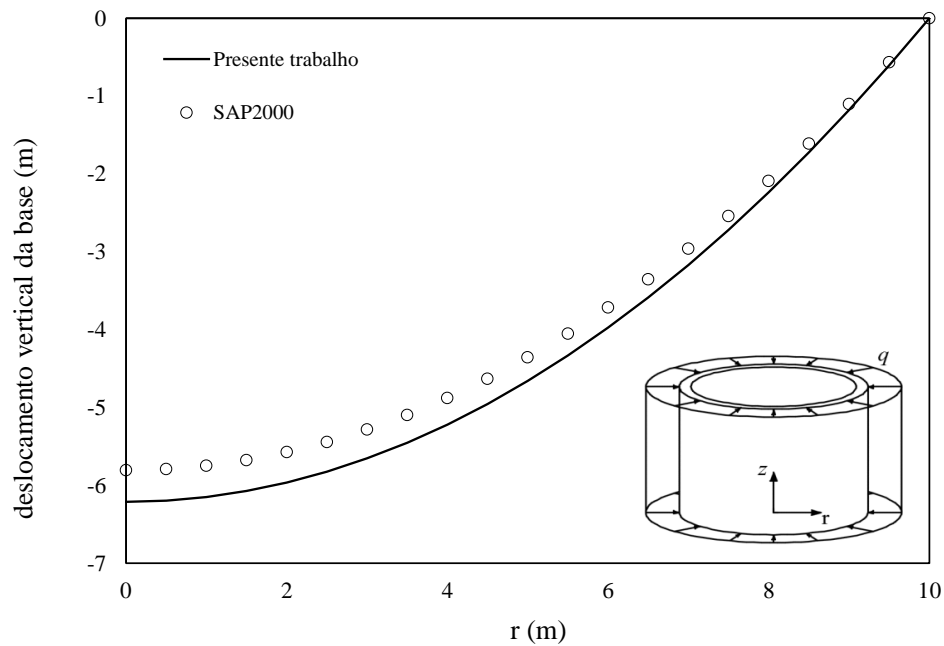


Figura 33 – Deslocamento vertical na base do poço ($r = 10\text{ m}$, $h = 10\text{ m}$, $t_p = 0,1\text{ m}$, $t_c = 0,1\text{ m}$, $E = 1000\text{ N/m}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 20\text{ kg/m}^3$).

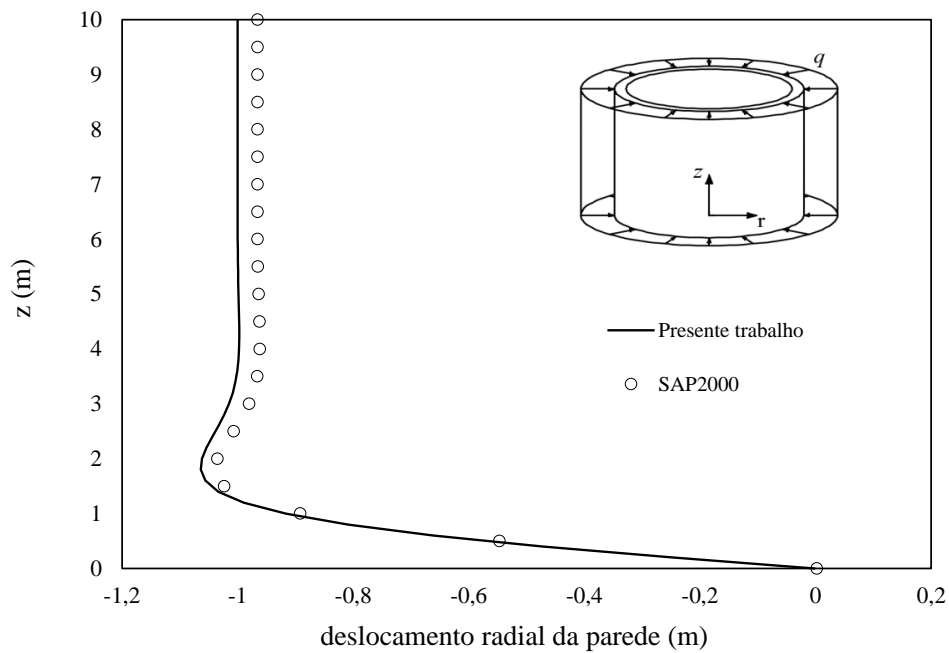


Figura 34 – Deslocamento radial da parede poço ($r = 10\text{ m}$, $h = 10\text{ m}$, $t_p = 0,1\text{ m}$, $t_c = 0,1\text{ m}$, $E = 1000\text{ N/m}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 20\text{ kg/m}^3$).

base da parede e a borda da base. As figuras 33 e 34 apresentam os deslocamentos verticais na base e os deslocamentos radiais na parede do poço, respectivamente. A malha é composta de 20 elementos de placa circular e 20 elementos de casca cilíndrica, totalizando 40 elementos. O modelo do SAP2000 é composto por 2560 elementos para a parede e para a base, totalizando 5120 elementos.

Tabela 3 – Frequências naturais para a modelagem do poço em elementos finitos para um apoio simples no centro da base e para apoio na borda da base

Apoio no centro		Apoio na borda	
Presente trabalho	ANSYS	Presente trabalho	ANSYS
0,00079	0,00079	0,00316	0,00315
0,00746	0,00743	0,01238	0,01236
0,01985	0,01975	0,02787	0,02785
0,03854	0,03832	0,04976	0,04964
0,06349	0,06306	0,07781	0,07765
0,09444	0,09366	0,11079	0,11033
0,11254	0,11235	0,11243	0,11194
0,11274	0,11263	0,11275	0,11261
0,11417	0,11405	0,11455	0,11431
0,11861	0,11840	0,11932	0,11904

O segundo exemplo é empregado para se validar a formulação de elementos finitos referente ao comportamento dinâmico, ou seja, mais especificamente a verificação das matrizes de massa. Para tanto, se investiga quais são as frequências naturais de um poço com as mesmas características do poço do primeiro exemplo. Compara-se então os resultados da formulação desenvolvida aqui a um modelo unidimensional axissimétrico utilizando o *software* ANSYS. A malha é composta de 20 elementos de placa circular e 20 elementos de casca cilíndrica, totalizando 40 elementos, tanto para o modelo deste trabalho quanto para o modelo do ANSYS. Os resultados, para as dez primeiras frequências naturais, para o caso de um poço simplesmente apoiado no perímetro da borda da base e para o caso de um apoio simples no centro geométrico da base do poço, são expressos na tabela 3.

7.3.2 Elementos de Contorno

Após a verificação da formulação do MEF para o poço, é necessário avaliar o tratamento dado às matrizes relativas ao MEC. A solução do sistema global fornece os deslocamentos e rotações nodais $\{w_0\}$ e também as cargas fictícias em cada elemento $\{Q\}$, que são uma distribuição de tensões que, quando combinadas às funções de influência de deslocamentos e tensões, geram os deslocamentos e as tensões no centro de cada elemento de contorno respectivamente. Utilizam-se funções de influência desenvolvidas na seção 5.3 para cargas aplicadas no interior do semi-espaço.

O problema original do poço é caracterizado por um meio semi-infinito com uma parte escavada ocupada pela estrutura do poço. A interface do solo com a estrutura apresenta tensões aplicadas que estão em equilíbrio com o carregamento externo e causam deslocamentos que, junto com a rigidez da estrutura, são compatibilizados.

Não existem funções de influência para o cálculo das tensões e deslocamentos diretamente para o caso em que há um espaço escavado no meio semi-infinito. Portanto, recorre-se à técnica apresentada na seção 5.1, na qual analisa-se um problema real a partir de um problema

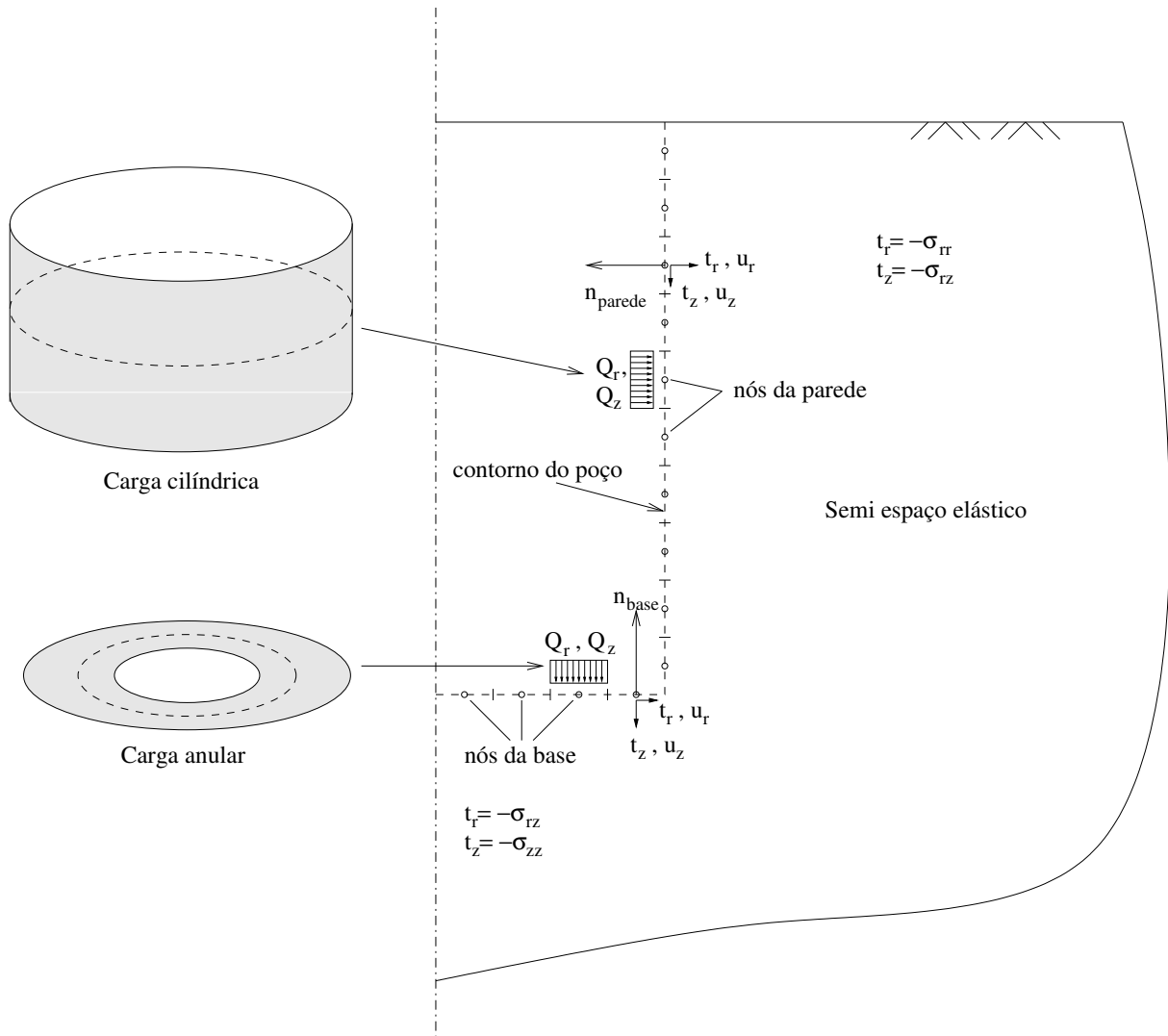


Figura 35 – Diretrizes do problema auxiliar para a determinação das cargas fictícias.

auxiliar.

A figura 35 ilustra o problema a ser estudado, bem como a delimitação do contorno a ser escavado no problema auxiliar sobre a qual se aplica tensões fictícias $\{Q\}$ de forma a se obter as condições de contorno do problema real. Para a diminuição de erros no resultado final, aproxima-se o contorno do problema auxiliar de modo que ele seja geometricamente idêntico ao contorno do problema original.

Diferentemente do caso em que a estrutura está apoiada sobre o semi-espaco e não há qualquer tipo de escavação, para o poço as tensões fictícias $\{Q\}$ não são as mesmas que as tensões reais do problema $\{t\}$, a relação entre elas é expressa na equação 6.6. As tensões são iguais apenas onde os contornos dos dois problemas coincidem, ou seja, na superfície livre onde não há a escavação para o poço. Não há, portanto, a necessidade de discretização da superfície livre, pois para se chegar as soluções de semi-espaco do capítulo 5, condições de contorno para superfície livre já foram aplicadas, assim, só é preciso discretizar a geometria do próprio poço.

O contorno é dividido então em n_e elementos de contorno e em cada elemento é aplicada uma carga distribuída uniforme fictícia. Os deslocamentos radial $u_r^{(i)}$ e vertical $u_z^{(i)}$ no

centro de um elemento i causados por cargas fictícias na direção radial $Q_r^{(j)}$ e na direção vertical $Q_z^{(j)}$ no elemento j , podem ser determinados através das funções de influência desenvolvidas para carga no interior do espaço, assim:

$$u_r^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_e} \left(U_{rr}^{(ij)} Q_r^{(j)} + U_{rz}^{(ij)} Q_z^{(j)} \right) \quad (7.29)$$

$$u_z^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_e} \left(U_{zr}^{(ij)} Q_r^{(j)} + U_{zz}^{(ij)} Q_z^{(j)} \right) \quad (7.30)$$

ou ainda na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u_r^{(1)} \\ u_z^{(1)} \\ u_r^{(2)} \\ u_z^{(2)} \\ \vdots \\ u_r^{(n_e)} \\ u_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{rr}^{(11)} & U_{rz}^{(11)} & U_{rr}^{(12)} & U_{rz}^{(12)} & \dots & U_{rr}^{(1n_e)} & U_{rz}^{(1n_e)} \\ U_{zr}^{(11)} & U_{zz}^{(11)} & U_{zr}^{(12)} & U_{zz}^{(12)} & \dots & U_{zr}^{(1n_e)} & U_{zz}^{(1n_e)} \\ U_{rr}^{(21)} & U_{rz}^{(21)} & U_{rr}^{(22)} & U_{rz}^{(22)} & \dots & U_{rr}^{(2n_e)} & U_{rz}^{(2n_e)} \\ U_{zr}^{(21)} & U_{zz}^{(21)} & U_{zr}^{(22)} & U_{zz}^{(22)} & \dots & U_{zr}^{(2n_e)} & U_{zz}^{(2n_e)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{rr}^{(n_e1)} & U_{rz}^{(n_e1)} & U_{rr}^{(n_e2)} & U_{rz}^{(n_e2)} & \dots & U_{rr}^{(n_en_e)} & U_{rz}^{(n_en_e)} \\ U_{zr}^{(n_e1)} & U_{zz}^{(n_e1)} & U_{zr}^{(n_e2)} & U_{zz}^{(n_e2)} & \dots & U_{zr}^{(n_en_e)} & U_{zz}^{(n_en_e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_r^{(1)} \\ Q_z^{(1)} \\ Q_r^{(2)} \\ Q_z^{(2)} \\ \vdots \\ Q_r^{(n_e)} \\ Q_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

$$\{u\} = [U] \{Q\} \quad (7.32)$$

onde a matriz de influência $[U]$ é expressa por:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{rr}^{(11)} & U_{rz}^{(11)} & U_{rr}^{(12)} & U_{rz}^{(12)} & \dots & U_{rr}^{(1n_e)} & U_{rz}^{(1n_e)} \\ U_{zr}^{(11)} & U_{zz}^{(11)} & U_{zr}^{(12)} & U_{zz}^{(12)} & \dots & U_{zr}^{(1n_e)} & U_{zz}^{(1n_e)} \\ U_{rr}^{(21)} & U_{rz}^{(21)} & U_{rr}^{(22)} & U_{rz}^{(22)} & \dots & U_{rr}^{(2n_e)} & U_{rz}^{(2n_e)} \\ U_{zr}^{(21)} & U_{zz}^{(21)} & U_{zr}^{(22)} & U_{zz}^{(22)} & \dots & U_{zr}^{(2n_e)} & U_{zz}^{(2n_e)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{rr}^{(n_e1)} & U_{rz}^{(n_e1)} & U_{rr}^{(n_e2)} & U_{rz}^{(n_e2)} & \dots & U_{rr}^{(n_en_e)} & U_{rz}^{(n_en_e)} \\ U_{zr}^{(n_e1)} & U_{zz}^{(n_e1)} & U_{zr}^{(n_e2)} & U_{zz}^{(n_e2)} & \dots & U_{zr}^{(n_en_e)} & U_{zz}^{(n_en_e)} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Como os elementos de contorno tem forma anelar na base e cilíndrica na parede, utilizam-se funções de influência apresentadas na seção 5.3 para um anel de carga com espessura finita e para um cilindro de carga, como pode ser visto na figura 35. Assim, nas equações 7.29 e 7.30, quando o elemento j localiza-se na parede do poço, utilizam-se funções de influência de cilindro de carga e quando j localiza-se na base do poço, utiliza-se funções de influência para um anel de carga espesso. Dessa forma, então, se obtém a matriz de influência $[U]$ relativa ao sistema global acoplado 7.28.

Assim como se calcula a matriz de influência $[U]$ para os deslocamentos, é possível se obter a matriz de influência para as tensões $[T]$ da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(1)} \\ t_z^{(1)} \\ t_r^{(2)} \\ t_z^{(2)} \\ \vdots \\ t_r^{(n_e)} \\ t_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{rr}^{(11)} & T_{rz}^{(11)} & T_{rr}^{(12)} & T_{rz}^{(12)} & \dots & T_{rr}^{(1n_e)} & T_{rz}^{(1n_e)} \\ T_{zr}^{(11)} & T_{zz}^{(11)} & T_{zr}^{(12)} & T_{zz}^{(12)} & \dots & T_{zr}^{(1n_e)} & T_{zz}^{(1n_e)} \\ T_{rr}^{(21)} & T_{rz}^{(21)} & T_{rr}^{(22)} & T_{rz}^{(22)} & \dots & T_{rr}^{(2n_e)} & T_{rz}^{(2n_e)} \\ T_{zr}^{(21)} & T_{zz}^{(21)} & T_{zr}^{(22)} & T_{zz}^{(22)} & \dots & T_{zr}^{(2n_e)} & T_{zz}^{(2n_e)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{rr}^{(n_e1)} & T_{rz}^{(n_e1)} & T_{rr}^{(n_e2)} & T_{rz}^{(n_e2)} & \dots & T_{rr}^{(n_en_e)} & T_{rz}^{(n_en_e)} \\ T_{zr}^{(n_e1)} & T_{zz}^{(n_e1)} & T_{zr}^{(n_e2)} & T_{zz}^{(n_e2)} & \dots & T_{zr}^{(n_en_e)} & T_{zz}^{(n_en_e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_r^{(1)} \\ Q_z^{(1)} \\ Q_r^{(2)} \\ Q_z^{(2)} \\ \vdots \\ Q_r^{(n_e)} \\ Q_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} \quad (7.34)$$

onde o primeiro índice de T_{ij} indica, a partir do tensor de tensões, qual a componente de tensão é relevante no problema, enquanto que o segundo índice indica a direção de aplicação da carga. A obtenção da matriz de influência de tensões apresenta uma nuance, pois diferentemente dos deslocamentos, ao se aplicar um carregamento em um meio elástico qualquer, três tensões são geradas ao invés de somente duas, como nos deslocamentos. As tensões geradas são: duas normais σ_{rr} e σ_{zz} e uma cisalhante $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$. Para se saber quais funções de influência são usadas na matriz de influência de tensões $[T]$ é necessária uma orientação através dos vetores unitários n_r e n_z de acordo com cada problema, no caso do poço, a figura 35 auxilia nessa orientação. A relação entre o tensor de tensões de o vetor unitário em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$t_r^{(i)} = \sigma_{rr}^{(ij)} n_r^{(i)} + \sigma_{rz}^{(ij)} n_z^{(i)} \quad (7.35)$$

$$t_z^{(i)} = \sigma_{zr}^{(ij)} n_r^{(i)} + \sigma_{zz}^{(ij)} n_z^{(i)} \quad (7.36)$$

ou ainda na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} t_r \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_r \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (7.37)$$

onde $n_r^{(i)}$ e $n_z^{(i)}$ são as componentes radial e vertical do vetor $\{n\}$ normal à superfície do elemento i e $\sigma_{rz} = \sigma_{zr}$. Assim, para os elementos localizados na base do poço $n = (0, -1)$ e para os elementos localizados na parede do poço $n = (-1, 0)$, dessa maneira, têm-se respectivamente, para elementos na base e na parede:

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(base)} \\ t_z^{(base)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (7.38)$$

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(parede)} \\ t_z^{(parede)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (7.39)$$

Portanto as tensões de interesse do poço como um todo, levando em conta a base e a parede e considerando que a numeração dos elementos começa no centro da base e termina no topo da parede, são:

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(1)} \\ t_z^{(1)} \\ t_r^{(2)} \\ t_z^{(2)} \\ \vdots \\ t_r^{(n_{eb})} \\ t_z^{(n_{eb})} \\ t_r^{(n_{eb}+1)} \\ t_z^{(n_{eb}+1)} \\ \vdots \\ t_r^{(n_e)} \\ t_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \vdots \\ \sigma_{rz}^{(n_{eb})} \\ \sigma_{zz}^{(n_{eb})} \\ \sigma_{rr}^{(n_{eb}+1)} \\ \sigma_{rz}^{(n_{eb}+1)} \\ \vdots \\ \sigma_{rr}^{(n_e)} \\ \sigma_{rz}^{(n_e)} \end{Bmatrix} \quad (7.40)$$

onde n_{eb} é o número de elementos da base e n_{ep} é o número de elementos da parede e n_e é o numero total de elementos dado por $n_e = n_{eb} + n_{ep}$. O cálculo das tensões de interesse pode ser expresso por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{rz}^{(n_{eb})} \\ \sigma_{zz}^{(n_{eb})} \\ \sigma_{rr}^{(n_{eb}+1)} \\ \sigma_{rz}^{(n_{eb}+1)} \\ \vdots \\ \sigma_{rr}^{(n_e)} \\ \sigma_{rz}^{(n_e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rzz}^{(11)} & \sigma_{rzz}^{(11)} & \dots & \sigma_{rzz}^{(1,n_e)} & \sigma_{rzz}^{(1,n_e)} \\ \sigma_{zzr}^{(11)} & \sigma_{zzz}^{(11)} & \dots & \sigma_{zzr}^{(1,n_e)} & \sigma_{zzz}^{(1,n_e)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{rzz}^{(n_{eb},1)} & \sigma_{rzz}^{(n_{eb},1)} & \dots & \sigma_{rzz}^{(n_{eb},n_e)} & \sigma_{rzz}^{(n_{eb},n_e)} \\ \sigma_{zzr}^{(n_{eb},1)} & \sigma_{zzz}^{(n_{eb},1)} & \dots & \sigma_{zzr}^{(n_{eb},n_e)} & \sigma_{zzz}^{(n_{eb},n_e)} \\ \sigma_{rrr}^{(n_{eb}+1,1)} & \sigma_{rrz}^{(n_{eb}+1,1)} & \dots & \sigma_{rrr}^{(n_{eb}+1,n_e)} & \sigma_{rrz}^{(n_{eb}+1,n_e)} \\ \sigma_{rzz}^{(n_{eb}+1,1)} & \sigma_{rzz}^{(n_{eb}+1,1)} & \dots & \sigma_{rzz}^{(n_{eb}+1,n_e)} & \sigma_{rzz}^{(n_{eb}+1,n_e)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{rrr}^{(n_e,1)} & \sigma_{rrz}^{(n_e,1)} & \dots & \sigma_{rrr}^{(n_e,n_e)} & \sigma_{rrz}^{(n_e,n_e)} \\ \sigma_{rzz}^{(n_e,1)} & \sigma_{rzz}^{(n_e,1)} & \dots & \sigma_{rzz}^{(n_e,n_e)} & \sigma_{rzz}^{(n_e,n_e)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Q_r^{(1)} \\ Q_z^{(1)} \\ \vdots \\ Q_r^{(n_{eb})} \\ Q_z^{(n_{eb})} \\ Q_r^{(n_{eb}+1)} \\ Q_z^{(n_{eb}+1)} \\ \vdots \\ Q_r^{(n_e)} \\ Q_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} \quad (7.41)$$

onde σ_{ijk} são as funções de influência para tensão calculadas na seção 5.3. Os dois primeiros índices de σ_{ijk} indicam a componente da tensão, enquanto que o terceiro índice indica a direção de aplicação da carga. Dessa forma, o sistema 7.34 pode ser expresso da seguinte maneira, logo:

$$\{t\} = [T] \{Q\}$$

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(1)} \\ t_z^{(1)} \\ \vdots \\ t_r^{(n_{eb})} \\ t_z^{(n_{eb})} \\ t_r^{(n_{eb}+1)} \\ t_z^{(n_{eb}+1)} \\ \vdots \\ t_r^{(n_e)} \\ t_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_{r_z r}^{(11)} & \dots & \sigma_{r_z z}^{(1, n_e)} \\ \sigma_{z_z r}^{(11)} & \dots & \sigma_{z_z z}^{(1, n_e)} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r_z r}^{(n_{eb}, 1)} & \dots & \sigma_{r_z z}^{(n_{eb}, n_e)} \\ \sigma_{z_z r}^{(n_{eb}, 1)} & \dots & \sigma_{z_z z}^{(n_{eb}, n_e)} \\ \sigma_{r_{rr}}^{(n_{eb}+1, 1)} & \dots & \sigma_{r_{rz}}^{(n_{eb}+1, n_e)} \\ \sigma_{r_z r}^{(n_{eb}+1, 1)} & \dots & \sigma_{r_z z}^{(n_{eb}+1, n_e)} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r_{rr}}^{(n_e, 1)} & \dots & \sigma_{r_{rz}}^{(n_e, n_e)} \\ \sigma_{r_z r}^{(n_e, 1)} & \dots & \sigma_{r_z z}^{(n_e, n_e)} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Q_r^{(1)} \\ Q_z^{(1)} \\ \vdots \\ Q_r^{(n_{eb})} \\ Q_z^{(n_{eb})} \\ Q_r^{(n_{eb}+1)} \\ Q_z^{(n_{eb}+1)} \\ \vdots \\ Q_r^{(n_e)} \\ Q_z^{(n_e)} \end{Bmatrix} \quad (7.42)$$

onde a matriz de influência $[T]$ é expressa por:

$$[T] = - \begin{bmatrix} \sigma_{r_z r}^{(11)} & \sigma_{r_z z}^{(11)} & \dots & \sigma_{r_z r}^{(1, n_e)} & \sigma_{r_z z}^{(1, n_e)} \\ \sigma_{z_z r}^{(11)} & \sigma_{z_z z}^{(11)} & \dots & \sigma_{z_z r}^{(1, n_e)} & \sigma_{z_z z}^{(1, n_e)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{r_z r}^{(n_{eb}, 1)} & \sigma_{r_z z}^{(n_{eb}, 1)} & \dots & \sigma_{r_z r}^{(n_{eb}, n_e)} & \sigma_{r_z z}^{(n_{eb}, n_e)} \\ \sigma_{z_z r}^{(n_{eb}, 1)} & \sigma_{z_z z}^{(n_{eb}, 1)} & \dots & \sigma_{z_z r}^{(n_{eb}, n_e)} & \sigma_{z_z z}^{(n_{eb}, n_e)} \\ \sigma_{r_{rr}}^{(n_{eb}+1, 1)} & \sigma_{r_{rz}}^{(n_{eb}+1, 1)} & \dots & \sigma_{r_{rr}}^{(n_{eb}+1, n_e)} & \sigma_{r_{rz}}^{(n_{eb}+1, n_e)} \\ \sigma_{r_z r}^{(n_{eb}+1, 1)} & \sigma_{r_z z}^{(n_{eb}+1, 1)} & \dots & \sigma_{r_z r}^{(n_{eb}+1, n_e)} & \sigma_{r_z z}^{(n_{eb}+1, n_e)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{r_{rr}}^{(n_e, 1)} & \sigma_{r_{rz}}^{(n_e, 1)} & \dots & \sigma_{r_{rr}}^{(n_e, n_e)} & \sigma_{r_{rz}}^{(n_e, n_e)} \\ \sigma_{r_z r}^{(n_e, 1)} & \sigma_{r_z z}^{(n_e, 1)} & \dots & \sigma_{r_z r}^{(n_e, n_e)} & \sigma_{r_z z}^{(n_e, n_e)} \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

7.3.3 Acoplamento

O acoplamento para a modelagem do poço segue as premissas apresentadas no início desta seção referentes ao sistema global 7.28. A ideia principal do método acoplamento desenvolvido é adaptar os deslocamentos e tensões obtidos através do MEC de forma que possam ser transferidos à formulação do MEF, sendo justamente essa a função das matrizes $[A]$ e $[D]$. Poder-se-ia adotar o caminho inverso e fazer uma análise do MEF e adaptá-lo ao MEC, porém a dificuldade seria maior devido ao fato de que no MEC, para o caso do poço em duas dimensões, têm-se como solução 2 deslocamentos e 2 tensões por nó, enquanto que a parcela relativa ao MEF apresenta 2 deslocamentos e 1 rotação.

Assim, ao fazer com que os elementos relativos ao MEF e ao MEC coincidam geometricamente, a modelagem de um poço apresenta: n_{eb} número de elementos na base, n_{ep} número de elementos na parede, n_e número total de elementos, dado por $n_e = n_{eb} + n_{ep}$, n_{nb} número de nós da base, n_{np} número de nós da parede, n_n número de nós total, dado por $n_n = n_{nb} + n_{np} - 1$.

Cada nó apresenta 3 graus de liberdade, exceto o nó posicionado no centro geométrico da base que possui apenas 1 grau de liberdade, consequentemente as matrizes relativas aos elementos finitos $[K]$ e $[M]$ tem tamanho $(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times (3n_{nb} + 3n_{np} - 5)$.

As matrizes $[U]$ e $[T]$ relativas ao MEC tem tamanho $2n_e \times 2n_e$. As matrizes de transferência $[A]$ e $[D]$ tem tamanho $(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times 2n_e$ e $2n_e \times (3n_{nb} + 3n_{np} - 5)$, respectivamente. O vetor $\{w_0\}$ relativo aos deslocamentos e rotações nodais e o vetor de cargas externas nodais $\{P_0\}$ têm tamanho $(3n_{nb} + 3n_{np} - 5) \times 1$ e o vetor de cargas fictícias $\{Q\}$ tem tamanho $2n_e \times 1$.

$$\begin{bmatrix} [K_d] & [A][T] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Os tamanhos das matrizes e vetores do sistema acoplado acima, expresso também em 7.28, são apresentados de forma resumida na tabela 1.

7.3.4 Validação

O estudo de poços de grande diâmetro sob a influência de carregamentos dinâmicos, considerando a estrutura como sendo flexível, dificilmente são encontrados na literatura. Estudos que analisam o comportamento dinâmico de estruturas que se aproximam geometricamente de um poço e que necessitam de uma análise dinâmica solo-estrutura, como: fundações circulares perfeitamente rígidas semi-enterradas, estacas com seções circulares, túneis circulares e mesmo placas circulares apoiadas na superfície, são difundidos na literatura, porém nenhum trabalho de poços flexíveis, que seja de conhecimento deste autor, foi feito.

A validação é feita através da comparação com aplicações já existentes na literatura que de alguma forma possam se assemelhar a um poço, dependendo da sua geometria. Assim, compara-se o modelo do poço ao caso de uma placa circular na superfície e ao caso de uma estaca. O poço se torna uma placa circular apoiada na superfície quando a altura da parede tende a zero, assim, somente a base do poço é considerada e como não há parede, a base se converte em uma placa circular na superfície. Já para o segundo caso, o poço se comporta como uma estaca quando a altura da parede é muito maior que seu diâmetro. Logo, as análises de placas circulares e estacas podem ser consideradas casos particulares de um poço circular, como pode ser visto na figura 36.

Primeiramente se compara o poço a uma placa circular, para tanto, compara-se os resultados da formulação ao trabalho de Labaki (2012). Os resultados são apresentados a partir de um adimensional de rigidez relativa K_r que pode ser dado por:

$$K_r = (1 - \nu_s^2) \frac{E_p}{E_s} \left(\frac{t_p}{R} \right)^3 \quad (7.44)$$

onde ν_s é coeficiente de Poisson do solo, E_p é o módulo de elasticidade da placa, E_s é o módulo de elasticidade do solo, t_p é a espessura e R é o raio da placa/poço. Aplica-se uma carga distribuída uniformemente equivalente à unidade e traça-se curvas que medem o deslocamento

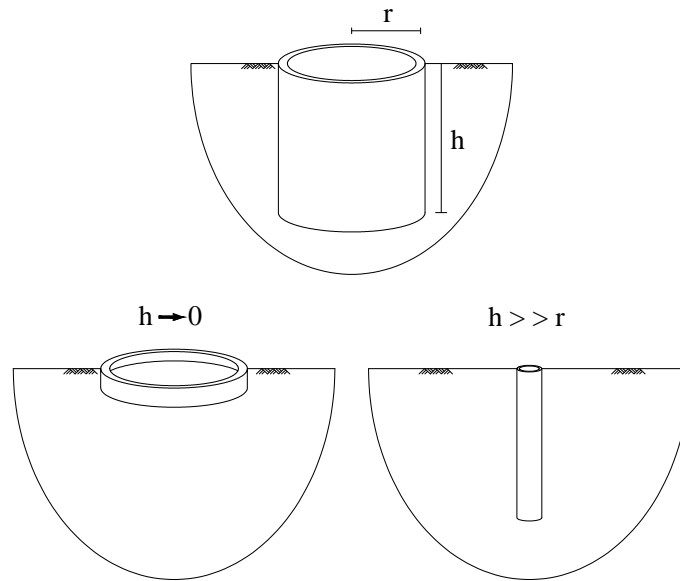


Figura 36 – Comportamento do poço como estaca ($h \gg r$) e como placa circular ($h \rightarrow 0$).

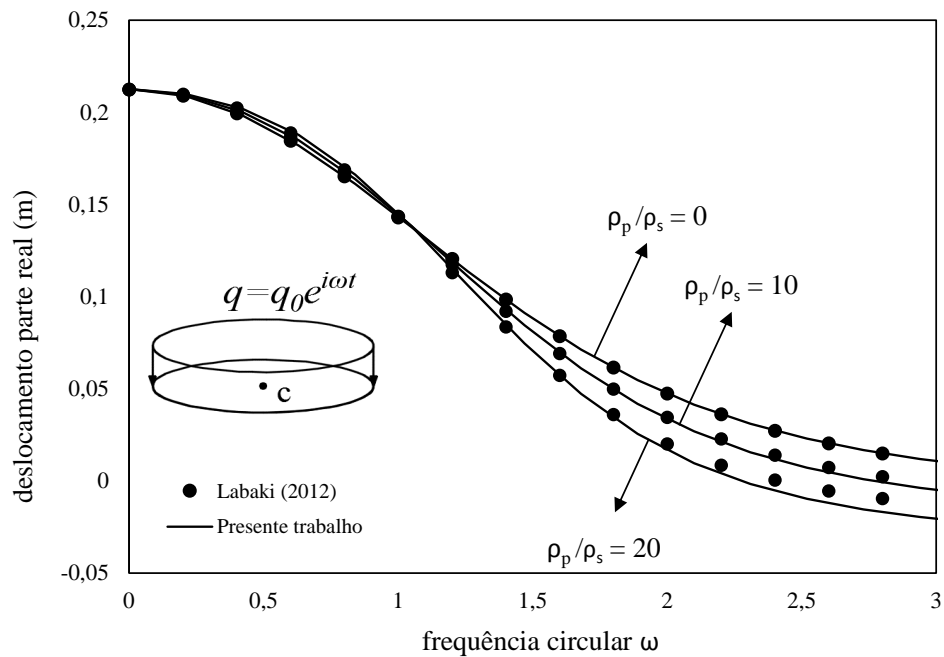


Figura 37 – Parte real dos deslocamentos verticais da placa circular apoiada sobre o solo ($K_r = 0,5$).

vertical u_z no centro da placa para diferentes relações entre as densidades da placa ρ_p e do solo ρ_s quando a rigidez relativa $K_r = 0,5$. Comparam-se os resultados obtidos neste trabalho com aqueles encontrados em [Labaki \(2012\)](#), o gráfico 37 apresenta os valores reais do deslocamento no centro da placa circular e o gráfico 38 apresenta os valores imaginários do deslocamento. A malha é composta somente por elementos para discretizar a base e nenhum elemento para discretizar a parede do poço. Assim, a base é composta por 20 elementos.

As diferenças nos gráficos das figuras 37 e 38 se tornam maiores a medida que se aumenta a frequência de excitação e também a relação entre as densidades. Observa-se, porém,

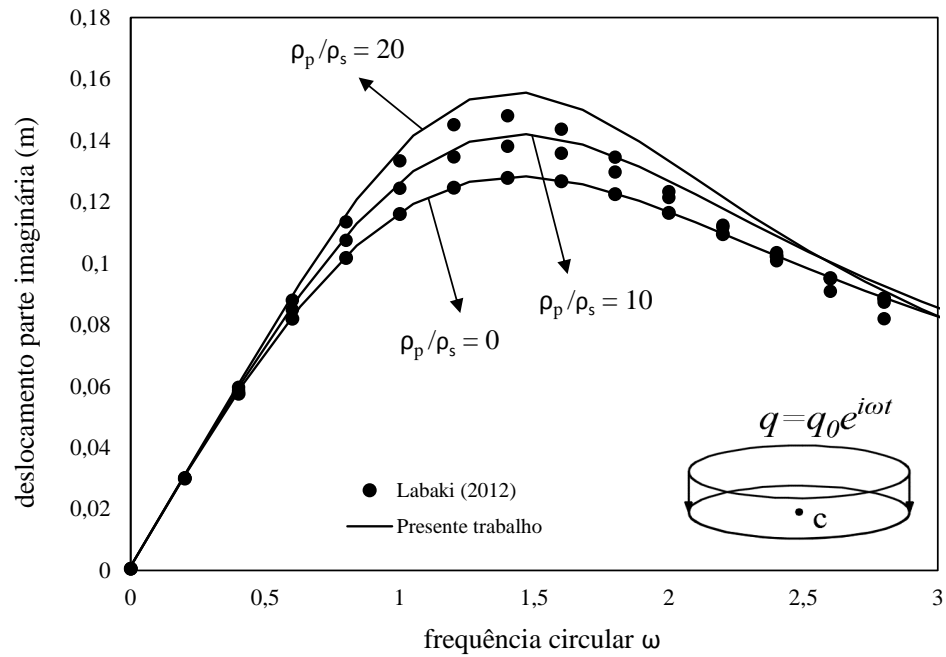


Figura 38 – Parte imaginária dos deslocamentos verticais da placa circular apoiada sobre o solo ($K_r = 0,5$).

resultados satisfatórios na comparação de placa circular, visto que as formulações apresentam diferenças significativas.

O próximo exemplo de validação da formulação é para o caso em que o poço se comporta como estaca, ou seja, quando o diâmetro do poço é muito menor que a altura da parede. Para isso, compara-se os resultados deste trabalho aos resultados para o caso em que uma estaca é submetida à uma carga axial estática e também para o caso em que a carga axial é dinâmica.

O estudo de uma estaca submetida a um carregamento axial estático é feito em [Ribeiro \(2009\)](#), no qual a formulação desenvolvida adequa-se também ao estudo de estacas. O exemplo analisado é de uma estaca cilíndrica vertical submetida a uma força axial de 726,4 kN aplicada no topo. Mede-se os deslocamentos verticais ao longo da profundidade da estaca de comprimento $l_p = 6,096$ m, diâmetro $d_e = 0,6096$ m de módulo de elasticidade $E_e = 2,1111 \times 10^7$ kN/m² e coeficiente de Poisson $\nu_e = 0,2$, imersa em um solo com módulo de elasticidade $E_s = 2,1111 \times 10^5$ kN/m² e coeficiente de Poisson $\nu_s = 0,2$ como ilustrado na figura 39. O gráfico 40 compara os resultados obtidos em [Ribeiro \(2009\)](#) e em [Filho, Mendonça e Paivaa \(2005\)](#) com os resultados do presente trabalho para tal caso de estaca submetida a carregamento estático. A malha é composta por 3 elementos para discretizar a base somente, já que o objetivo é simular o poço se comportando como estaca, e 30 elementos para discretizar a parede do poço, totalizando 33 elementos.

Compara-se a seguir o resultado do poço comportando-se como estaca submetida à uma excitação dinâmica. Os trabalhos de [Barros \(2003\)](#) e [Rajapakse e Shah \(1987\)](#) estudam os casos de estacas submetidas a cargas axiais dinâmicas. Nesses trabalhos expressam-se os

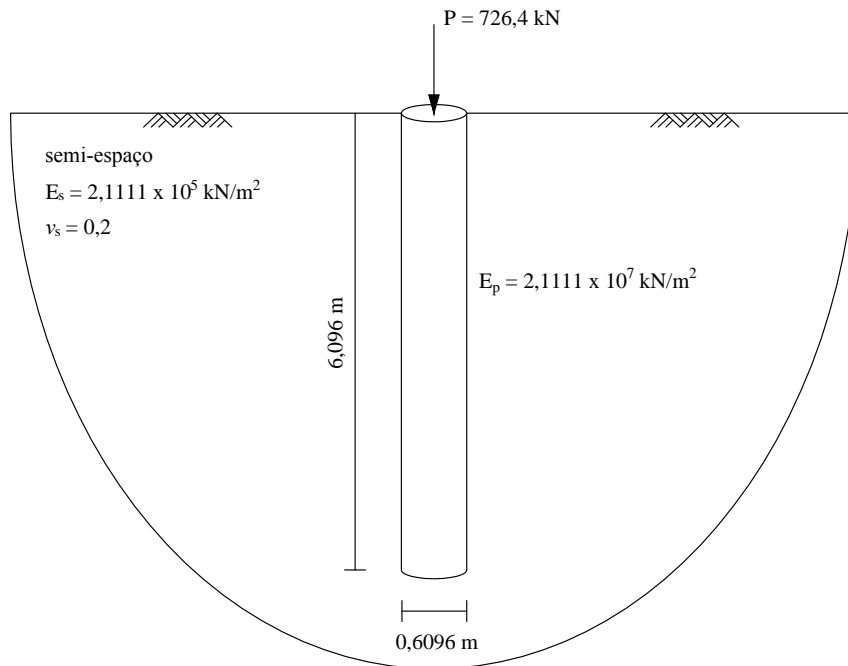


Figura 39 – Exemplo de estaca submetida a um carregamento axial estático.

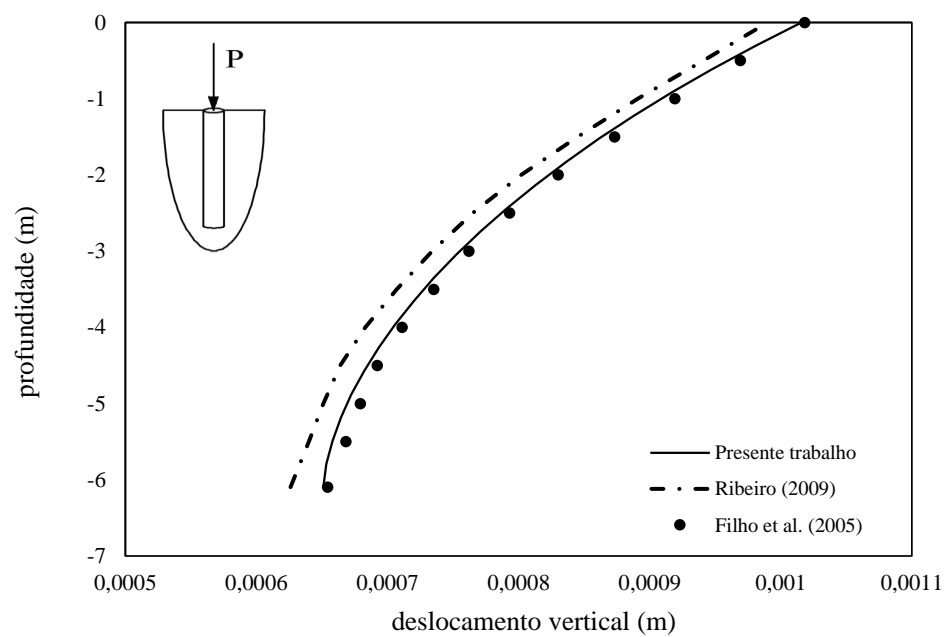


Figura 40 – Deslocamento vertical de uma estaca em um solo isotrópico ($P = 726,4 \text{ kN}$, $l_p = 6,096 \text{ m}$, $d_e = 0,6096 \text{ m}$, $E_e = 2,1111 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu_e = 0,2$, $E_s = 2,1111 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, $\nu_s = 0,2$).

Tabela 4 – Comparação de impedâncias K_{vv} para diferentes valores de a_0 ($E_p/E_s = 1000$, $l_p/a_e = 10$, $\rho_e/\rho_s = 1$, $\nu_s = 0,25$).

	Presente trabalho		Barros (2003)		Rajapakse e Shah (1987)	
a_0	Real	Imag.	Real	Imag.	Real	Imag.
0,4	24,40	31,83	24,25	31,80	24,31	32,81
1,0	2,61	70,50	2,62	70,43	2,61	71,31
1,5	-34,27	105,98	-33,72	105,70	-34,91	107,20

resultados através da impedância vertical, que pode ser dada pela seguinte fórmula:

$$K_{vv} = \frac{F_z}{u_z^{(t)} a_e \mu} \quad (7.45)$$

onde F_z é uma força harmônica vertical aplicada no topo da estaca, $u_z^{(t)}$ é o deslocamento vertical no topo da estaca, a_e é o raio da estaca e μ é o módulo de elasticidade transversal do solo calculado através da equação 3.15. Os resultados da impedância K_{vv} são expressos em função da frequência adimensional a_0 , que para estaca é dada por:

$$a_0 = \frac{a_e \omega}{c_s} \quad (7.46)$$

onde ω é a frequência de excitação da carga vertical e c_s é a velocidade da onda de cisalhamento expressa na equação 7.22. A tabela 4 apresenta a comparação dos valores de impedância K_{vv} entre os trabalhos citados para três diferentes frequências adimensionais quando a relação entre o comprimento da estaca l_p e o raio da estaca a_e é igual a $l_p/a_e = 10$, a relação entre os módulos de elasticidade da estaca E_e e do solo E_s é igual a $E_p/E_s = 1000$, a relação entre as densidades da estaca ρ_e e do solo ρ_s é igual a $\rho_e/\rho_s = 1$ e o coeficiente de Poisson do solo é $\nu_s = 0,25$. A malha utilizada é de 3 elementos para discretizar a base e 30 elementos para discretizar a parede do poço, totalizando 33 elementos.

Os gráficos 41 e 42 apresentam os valores reais e imaginários, respectivamente, das impedâncias verticais quando a estaca e o solo têm as seguintes características: relação entre o comprimento da estaca l_p e o raio da estaca a_e é igual a $l_p/a_e = 50$, relação entre os módulos de elasticidade da estaca E_e e do solo E_s é igual a $E_p/E_s = 1000$, a relação entre as densidades da estaca ρ_e e do solo ρ_s é igual a $\rho_e/\rho_s = 1,5$ e coeficiente de Poisson do solo $\nu_s = 0,25$.

Verifica-se que tanto para o caso estático quanto para o caso dinâmico, expressos nos gráficos 40, 41 e 42 e na tabela 4, os resultados se mostraram bem satisfatórios, considerando que o poço não é exatamente uma estaca e sua formulação não é diretamente direcionada a tal aplicação, porém é mais um caso em que a metodologia utilizada neste trabalho pode ser empregada.

7.3.5 Casos de Carga

Os exemplos a seguir são elaborados de forma que se possa aplicar a formulação deste trabalho e a própria utilização dos resultados apresentados como base para o dimensiona-

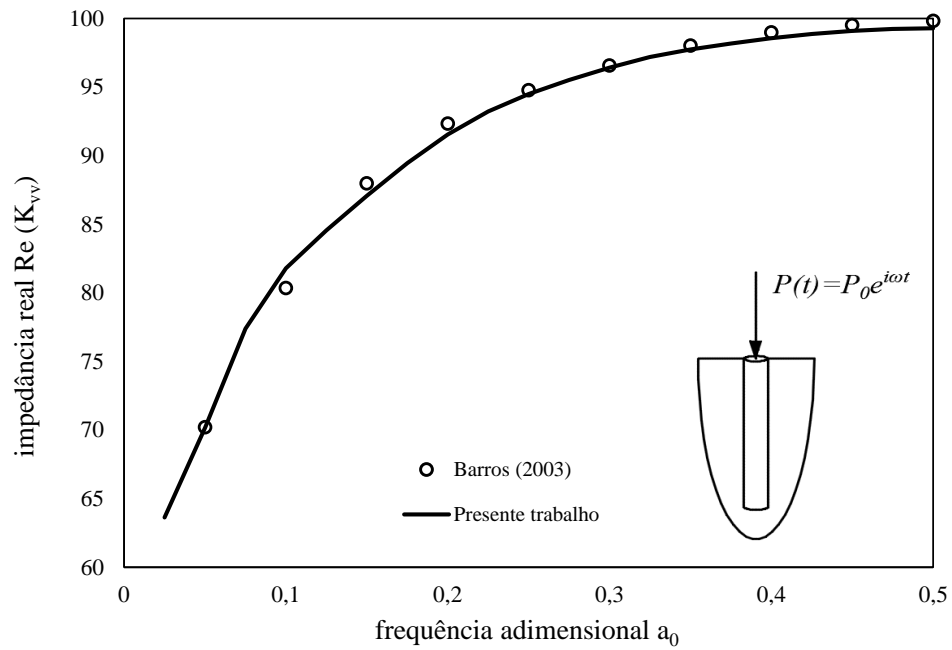


Figura 41 – Parte real da impedância vertical de uma estaca em um solo isotrópico ($E_p/E_s = 1000$, $l_p/a_e = 50$, $\rho_e/\rho_s = 1,5$, $\nu_s = 0,25$).

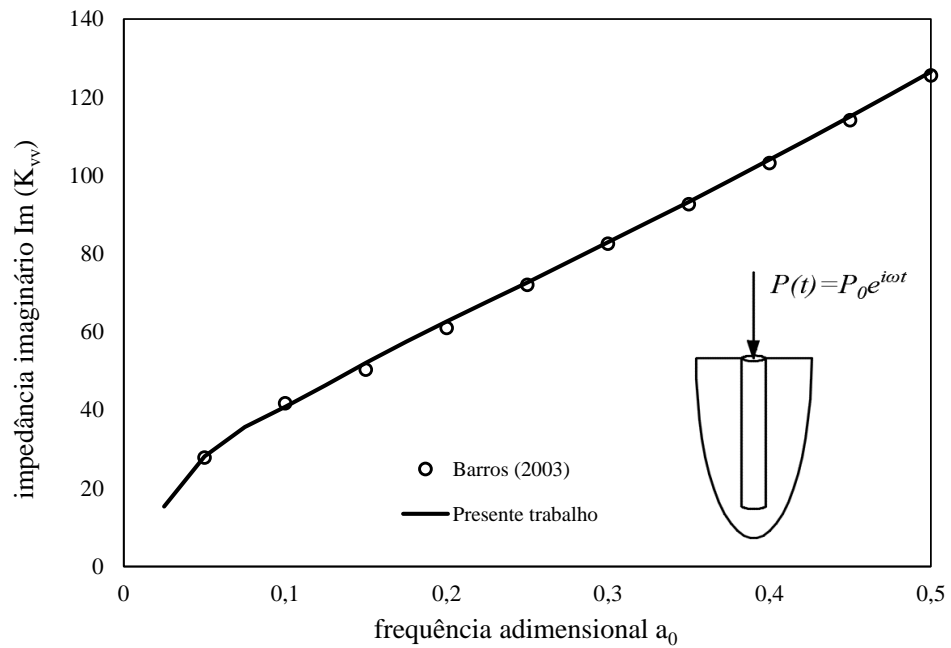


Figura 42 – Parte imaginária da impedância vertical de uma estaca em um solo isotrópico ($E_p/E_s = 1000$, $l_p/a_e = 50$, $\rho_e/\rho_s = 1,5$, $\nu_s = 0,25$).

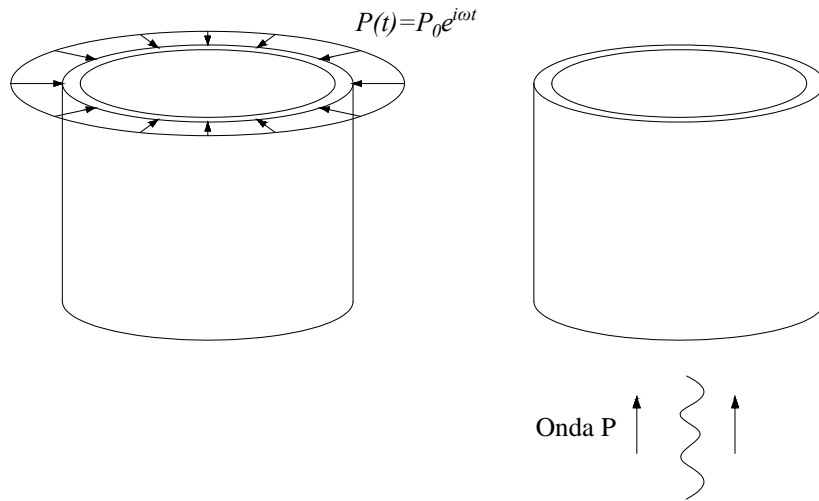


Figura 43 – Casos de carga analisados para o poço.

mento. Dessa forma procura-se apresentar casos de carga que possam ter relação com situações reais da engenharia, visando resultados que possam ter aplicações práticas. Devido à limitação da modelagem axissimétrica, porém, os casos de carga com aplicações práticas tem uma certa limitação. Assim escolhe-se dois carregamentos considerados mais relevantes, o primeiro é uma simulação em relação às vibrações que ocorrem cotidianamente na superfície, como o funcionamento de máquinas no canteiro de obra e tráfego de veículos em geral. O segundo carregamento é causado por um abalo sísmico na direção vertical.

O primeiro carregamento, através de um anel de carga harmônica na direção radial aplicado no topo, simula as vibrações próximas ao poço na superfície. O abalo sísmico é simulado através de uma onda P de compressão na direção vertical. Outros casos de ondas em outras direções, como ondas Rayleigh e ondas S, não são avaliadas devido à dificuldades de representar tais ondas por meio de uma modelagem axissimétrica. Ambos os casos de carga são ilustrados na figura 43.

O carregamento representando as vibrações na superfície pode ser expresso por um simples caso de linha de carga harmônica anelar de intensidade dada por $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$.

O mesmo processo de dedução detalhado para uma simples carregamento harmônico, como é apresentado no capítulo 6, pode ser usado para determinar a resposta dinâmica do conjunto poço-solo a uma excitação dinâmica dada por ondas sísmicas, se essas ondas se propagarem apenas na direção vertical e o deslocamento provocado por essas ondas também for apenas na direção vertical. Nessas condições, essas são ondas de pressão P ou primárias propagando na direção z .

Como o deslocamento devido às ondas ocorre apenas na direção z , as equações de movimento do meio 5.5, 5.6 e 5.7 sob a ação dessas ondas se reduzem a:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (7.47)$$

A equação 7.47 pode ainda ser expressa em função da velocidade da onda de compressão c_p dada por:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_s}} \quad (7.48)$$

assim:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (7.49)$$

No domínio da frequência, $u_z(z, t) = u_z(z, \omega) e^{i\omega t}$, o que resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= -\frac{1}{c_p^2} \omega^2 u_z \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_p^2} u_z &= 0 \end{aligned} \quad (7.50)$$

A equação 7.50 é uma equação homogênea de segunda ordem e admite solução do seguinte tipo:

$$u_z(z) = C_1 e^{\Delta_1 z} + C_2 e^{\Delta_2 z} \quad (7.51)$$

onde C_1 e C_2 e são constantes determinadas através das condições de contorno do problema e Δ_1 e Δ_2 são raízes da equação característica de 7.50, que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta^2 + \frac{\omega^2}{c_p^2} = 0 \quad (7.52)$$

Assim, as raízes Δ_1 e Δ_2 de 7.52 são:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= i \frac{\omega}{c_p} \\ \Delta_2 &= -i \frac{\omega}{c_p} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação 7.50 fica:

$$u_z(z) = C_1 e^{i \frac{\omega}{c_p} z} + C_2 e^{-i \frac{\omega}{c_p} z} \quad (7.53)$$

Impondo um deslocamento inicial na superfície $u_z(0) = u_0$ e notando que na superfície livre $z = 0$, as tensões são nulas. Portanto, a partir da relação constitutiva 3.37, as condições de contorno do problema ficam:

$$u_z(0) = u_0 \quad (7.54)$$

$$\sigma_{zz}(0) = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad (7.55)$$

As condições de contorno 7.54 e 7.55 possibilitam a obtenção das constantes C_1 e C_2 da equação 7.53. Assim:

$$C_1 = C_2 = \frac{u_0}{2}$$

Substituindo os valores das constantes C_1 e C_2 na equação 7.53, chega-se ao deslocamento $u_z(z)$, que pode ser expresso por:

$$u_z(z) = \frac{u_0}{2} \left(e^{i\frac{\omega}{c_p}z} + e^{-i\frac{\omega}{c_p}z} \right) \quad (7.56)$$

Aplicando a fórmula de Euler na equação 7.56 o deslocamento u_z fica:

$$u_z(z) = u_0 \cos \left(z \frac{\omega}{c_p} \right) \quad (7.57)$$

Encontrado o valor do deslocamento u_z é possível obter as tensões devidas a onda P a partir das equações 3.35, 3.37 e 3.40, que para modelos axissimétricos são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{rz} &= 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Considerando-se apenas deslocamentos na direção vertical z , as tensões ficam:

$$\sigma_{rr} = \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (7.58)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (7.59)$$

$$\sigma_{rz} = 0 \quad (7.60)$$

Assim, substituindo-se o deslocamento $u_z(z)$ da equação 7.57 nas equações 7.58 e 7.59, é possível obter as tensões σ_{rr} e σ_{zz} .

$$\sigma_{rr}(z) = -\lambda u_0 \frac{\omega}{c_p} \sin \left(z \frac{\omega}{c_p} \right) \quad (7.61)$$

$$\sigma_{zz}(z) = -(\lambda + 2\mu) u_0 \frac{\omega}{c_p} \sin \left(z \frac{\omega}{c_p} \right) \quad (7.62)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé encontradas nas equações 3.14 e 3.15, u_0 é o deslocamento inicial, ω é a frequência circular da onda sísmica e c_p é a velocidade da onda de compressão c_p .

Deslocamentos $u_z(z)$ e tensões $\sigma_{rr}(z)$ e $\sigma_{zz}(z)$ são causados pela onda sísmica P ao longo da interface entre o poço e o solo. Essas tensões e deslocamentos podem ser expressos como a soma das tensões $t^{(inc)}$ e deslocamentos $u^{(inc)}$ incidentes e as tensões $t^{(sc)}$ e deslocamentos $u^{(sc)}$ dispersados pela estrutura:

$$u = u^{(inc)} + u^{(sc)} \quad (7.63)$$

$$t = t^{(inc)} + t^{(sc)} \quad (7.64)$$

O vetor de deslocamentos incidentes por elemento $\{u^{(inc)}\}$ ao longo da estrutura do poço é obtido utilizando-se a equação 7.57, logo:

$$\{u^{(inc)}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_0 \cos\left(z \frac{\omega}{c_p}\right) \end{Bmatrix} \quad (7.65)$$

Quanto às tensões, elas são diferentes ao longo da base e da parede e seguem as premissas apresentadas nas expressões 7.38, 7.39 e 7.40. Portanto, as tensões ao longo da base e da parede são respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(base)} \\ t_z^{(base)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_r^{(parede)} \\ t_z^{(parede)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}$$

Dessa forma, utilizando as expressões 7.61 e 7.62, chega-se ao vetor de tensões por elemento:

$$\{t_{base}^{(inc)}\} = \begin{Bmatrix} t_r^{(base)} \\ t_z^{(base)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (\lambda + 2\mu) u_0 \frac{\omega}{c_p} \sin\left(z \frac{\omega}{c_p}\right) \end{Bmatrix} \quad (7.66)$$

$$\{t_{parede}^{(inc)}\} = \begin{Bmatrix} t_r^{(parede)} \\ t_z^{(parede)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda u_0 \frac{\omega}{c_p} \sin\left(z \frac{\omega}{c_p}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.67)$$

Ressalta-se o fato de que as expressões de tensões e deslocamentos da onda incidente são expressas a partir de um deslocamento inicial u_0 , porém, é possível ainda obter os valores de $\{u^{(inc)}\}$ e $\{t^{(inc)}\}$ a partir de uma velocidade inicial ou mesmo de uma aceleração inicial. Para isso, basta substituir o valor de u_0 por $v_0/i\omega$, no caso de uma velocidade inicial v_0 ,

ou substituir o valor de u_0 por $-\alpha_0/\omega^2$, no caso de uma aceleração inicial α_0 , nas expressões 7.65, 7.66 e 7.67.

Como a onda sísmica não é um carregamento diretamente aplicado à estrutura mas sim tensões e deslocamentos impostos incidentes devido a onda P que geram deslocamentos e rotações na estrutura do poço, o sistema acoplado se altera. O sistema acoplado encontrado na seção 6.3 é dado por:

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & [A][T] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

Sabe-se que o sistema acima é proveniente das seguintes equações:

$$\begin{cases} ([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [A][T] \{Q\} = \{P_0\} \\ [D] \{w_0\} - [U] \{Q\} = \{0\} \end{cases}$$

As equações acima são expressas em 6.8 e 6.10. Sabe-se, também, de acordo com as equações 6.5 e 6.6, que as tensões e deslocamentos no solo são dados da seguinte forma pelas expressões :

$$\{t\} = [T] \{Q\} \quad (7.68)$$

$$\{u\} = [U] \{Q\} \quad (7.69)$$

Logo, o sistema acoplado pode ser expresso por:

$$\begin{cases} ([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [A] \{t\} = \{P_0\} \\ [D] \{w_0\} - \{u\} = \{0\} \end{cases} \quad (7.70)$$

Devido à onda sísmica, as expressões de $\{t\}$ e $\{u\}$ são separadas em tensões e deslocamentos incidentes e tensões e deslocamentos dispersados de acordo com as expressões 7.63 e 7.64, portanto, tem-se:

$$\{t\} = \{t^{(inc)}\} + \{t^{(sc)}\} \quad (7.71)$$

$$\{u\} = \{u^{(inc)}\} + \{u^{(sc)}\} \quad (7.72)$$

No caso das equações acima, tem-se que as tensões $\{t^{(sc)}\}$ e deslocamentos dispersados $\{u^{(sc)}\}$ são calculados justamente como nas equações 7.68 e 7.69 e as tensões $\{t^{(inc)}\}$ e deslocamentos $\{u^{(inc)}\}$ incidentes são calculados como é mostrado nas expressões 7.65, 7.66 e 7.67. Assim, as equações 7.71 e 7.72 ficam:

$$\{t\} = \{t^{(inc)}\} + [T] \{Q\} \quad (7.73)$$

$$\{u\} = \{u^{(inc)}\} + [U] \{Q\} \quad (7.74)$$

Substituindo-se as expressões 7.73 e 7.74 no sistema 7.70, tem-se o seguinte sistema acoplado:

$$\begin{cases} ([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [A] \{t^{(inc)}\} + [T] \{Q\} = \{P_0\} \\ [D] \{w_0\} - \{u^{(inc)}\} - [U] \{Q\} = \{0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [T] \{Q\} = \{P_0\} - [A] \{t^{(inc)}\} \\ [D] \{w_0\} - [U] \{Q\} = \{u^{(inc)}\} \end{cases} \quad (7.75)$$

Observa-se que o vetor $\{P_0\}$ é vetor de forças e momentos nodais, portanto, caso se considere somente a atuação da onda sísmica, o vetor $\{P_0\}$ é igual zero. Dessa forma o sistema 7.75 fica:

$$\begin{cases} ([K] - \omega^2 [M]) \{w_0\} + [T] \{Q\} = -[A] \{t^{(inc)}\} \\ [D] \{w_0\} - [U] \{Q\} = \{u^{(inc)}\} \end{cases} \quad (7.76)$$

ou ainda na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2 [M] & [A] [T] \\ [D] & -[U] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_0\} \\ \{Q\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[A] \{t^{(inc)}\} \\ \{u^{(inc)}\} \end{Bmatrix} \quad (7.77)$$

Lembrando-se que as tensões $\{t^{(inc)}\}$ e deslocamentos $\{u^{(inc)}\}$ incidentes podem ser calculados pelas expressões 7.65, 7.66 e 7.67 e que as incógnitas do sistema final acoplado são os deslocamentos e rotações dos nós extremos $\{w_0\}$ do elemento e as carga fictícias uniformemente distribuídas $\{Q\}$ em cada elemento.

7.3.6 Resultados

Os resultados da modelagem do poço são apresentados a seguir. Os parâmetros do poço e do solo são fixados para ambos casos de solicitações em todos os exemplos utilizados. A relação entre o módulo de elasticidade do poço E_{po} e o módulo de elasticidade do solo E_s é dado por $E_{po}/E_s = 1000$, a relação entre a densidade do poço ρ_p e a densidade do solo ρ_s é dada por $\rho_p/\rho_s = 1,5$, o coeficiente de Poisson do poço ν_p e do solo ν_s são adotados como sendo iguais e a relação entre as espessuras da base t_p e da parede t_c é dada por $t_p/t_c = 2$, sendo a espessura da parede $t_c = 0,01R$. A tabela 5 apresenta um resumo das relações entre os parâmetros do poço e do solo.

Os resultados também são apresentados a partir da frequência adimensional a_0 dada na equação 7.46, ou seja:

$$a_0 = \omega R \sqrt{\frac{\rho_s}{\mu}}$$

onde ω é a frequência de excitação e R é o raio do poço.

Tabela 5 – Relações entre os parâmetros do poço e do solo considerados nas análises.

Parâmetro	Relação
Módulo de elasticidade	$E_{po}/E_s = 1000$
Massa específica	$\rho_p/\rho_s = 1,5$
Coefficiente de Poisson	$\nu_p/\nu_s = 1$
Espessura	$t_p/t_c = 2, t_c = 0,01R$

O primeiro caso de carga em que o carregamento é um linha de carga harmônica anelar, apresentam-se os deslocamentos transversais ao longo da estrutura do poço através de um fator \bar{u} de deslocamento da seguinte maneira:

$$\bar{u} = w_0 \frac{R\mu_s}{P} \quad (7.78)$$

onde \bar{u} é o fator de deslocamento, w_0 é o deslocamento obtido, R é o raio do poço, μ_s módulo de elasticidade transversal do solo e P é a força total aplicada.

Para a onda sísmica, os deslocamentos são uma relação entre o deslocamento inicial u_0 causado pela onda e o deslocamento obtido, assim:

$$\bar{u}_s = \frac{w_0}{u_0} \quad (7.79)$$

onde w_0 é o deslocamento obtido e u_0 deslocamento inicial.

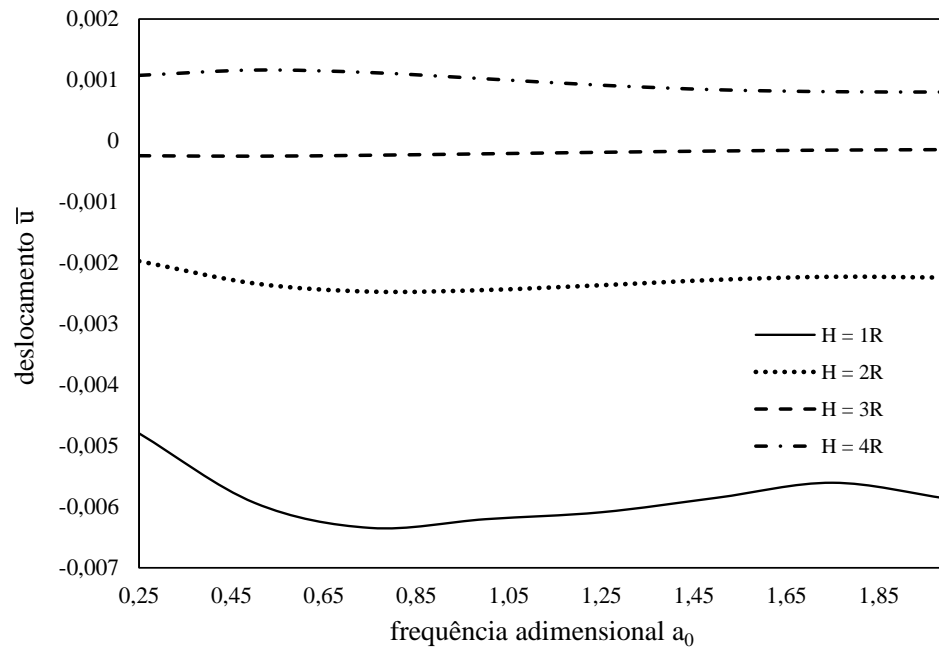
Os momentos, para o caso de uma onda P, são expressos da seguinte maneira:

$$\bar{M} = M \frac{R^2}{Du_0} \quad (7.80)$$

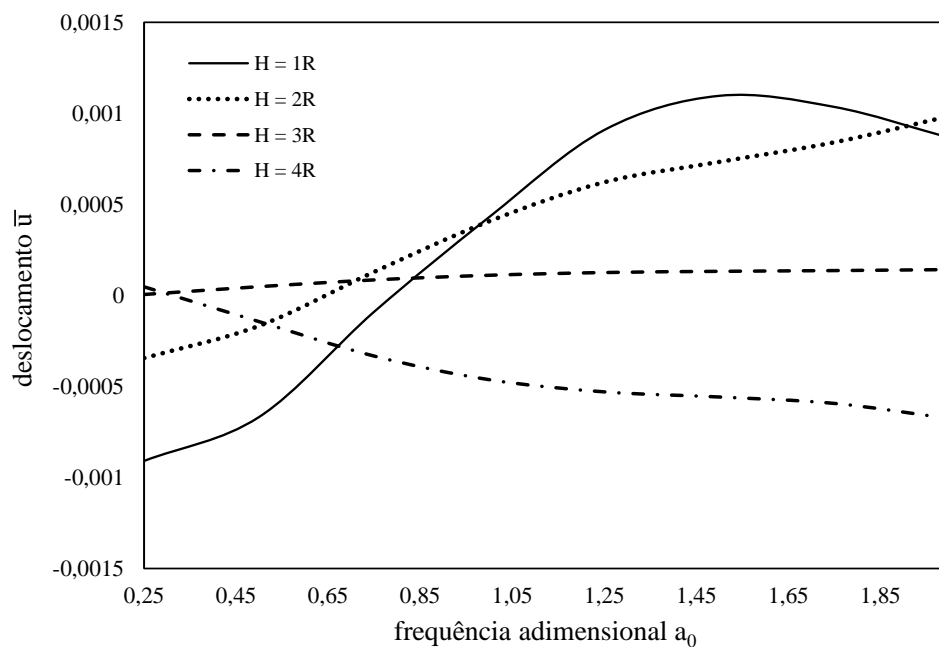
onde M é momento obtido por unidade de comprimento, R é o raio do poço, u_0 deslocamento inicial e D é a rigidez de placa.

A malha utilizada para os casos estudados do poço tem 40 elementos para discretização da base e 60 elementos para discretização da parede. Mede-se o deslocamento vertical na base do centro geométrico do poço w_{base} e também o deslocamento vertical no topo da parede do poço w_{topo} . O caso de carga utilizado é o anel de carga harmônica unitário na direção radial e a frequência do carregamento é $a_0 = 0,5$. Os resultados convertem de acordo com a tabela 6 obtida para diferentes malhas do poço. Nesta tabela, a primeira coluna representa o número de elementos utilizados para discretizar a base, a segunda coluna representa o número de elementos utilizados para discretizar a parede e as outras colunas são os valores dos deslocamentos para a malha escolhida. Os parâmetros do solo e da estrutura utilizados são apresentados na tabela 5, exceto pelas densidades que são consideradas iguais para a estrutura e para o solo. O raio R e a altura H do poço têm a mesma dimensão.

O gráfico 44 relaciona, através do fator de deslocamento \bar{u} apresentado em 7.78, os deslocamentos verticais no topo do poço, para diferentes relações H/R entre a altura H e raio do poço R , com valores da frequência adimensional a_0 variando de 0,25 à 2, para uma linha de carga anelar ao longo da seção na superfície do topo.



(a) Parte real.



(b) Parte imaginária.

Figura 44 – Deslocamento vertical no topo do poço devido a uma carga anelar radial.

Tabela 6 – Deslocamento vertical no topo e na base do poço para diferentes malhas.

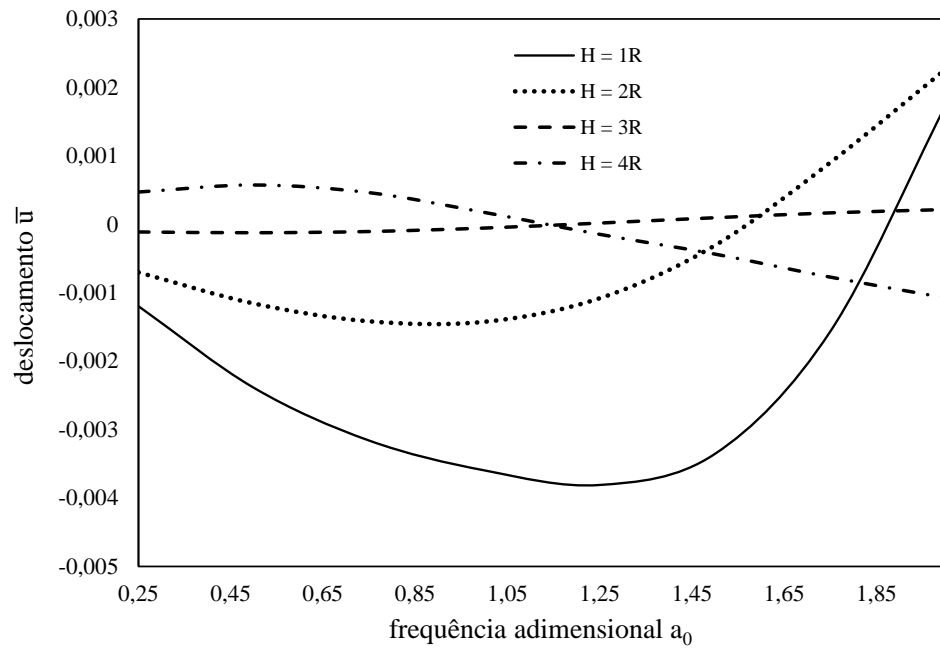
Base	Parede	w_{base}	w_{topo}
5	10	$-0,0023 - 0,0004i$	$-0,0057 - 0,0005i$
10	15	$-0,0025 - 0,0006i$	$-0,0062 - 0,0006i$
10	20	$-0,0026 - 0,0005i$	$-0,0067 - 0,0006i$
10	30	$-0,0028 - 0,0004i$	$-0,0071 - 0,0004i$
20	40	$-0,0033 + 0,0001i$	$-0,0081 + 0,0001i$
30	50	$-0,0034 + 0,0002i$	$-0,0083 + 0,0002i$
40	50	$-0,0032 + 0,0001i$	$-0,0081 + 0,0002i$
40	60	$-0,0032 + 0,0001i$	$-0,0081 + 0,0002i$

O gráfico 45 relaciona, através do fator de deslocamento \bar{u} apresentado em 7.78, os deslocamentos verticais no centro geométrico da base do poço para diferentes relações H/R entre a altura H e raio do poço R , com valores da frequência adimensional a_0 variando de 0,25 à 2, para uma linha de carga anelar ao longo da seção na superfície do topo.

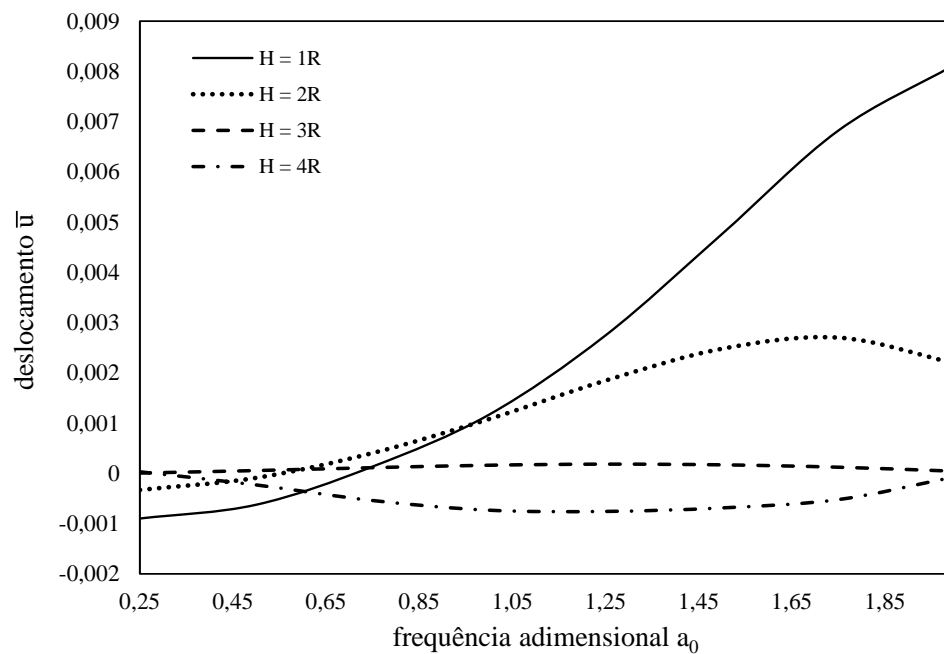
O gráfico 46 relaciona, através do fator de deslocamento \bar{u}_s apresentado em 7.79, os deslocamentos verticais no topo do poço para diferentes relações H/R entre a altura H e raio do poço R , com o valores da frequência adimensional a_0 variando de 0 à 2, para uma onda sísmica de pressão na direção vertical.

O gráfico 47 relaciona, através do fator de deslocamento \bar{u}_s apresentado em 7.79, os deslocamentos verticais no centro geométrico da base do poço para diferentes relações H/R entre a altura H e raio do poço R , com o valores da frequência adimensional a_0 variando de 0 à 2, para uma onda sísmica de pressão na direção vertical.

O gráfico 48 relaciona, através do fator de momento \bar{M} apresentado em 7.80, os valores dos momentos ao longo da parede e da base do poço para a relação $H/R = 3$, para dois valores diferentes de frequência adimensional: $a_0 = 1$, $a_0 = 4$ e $a_0 = 6$, para uma onda sísmica de pressão na direção vertical.

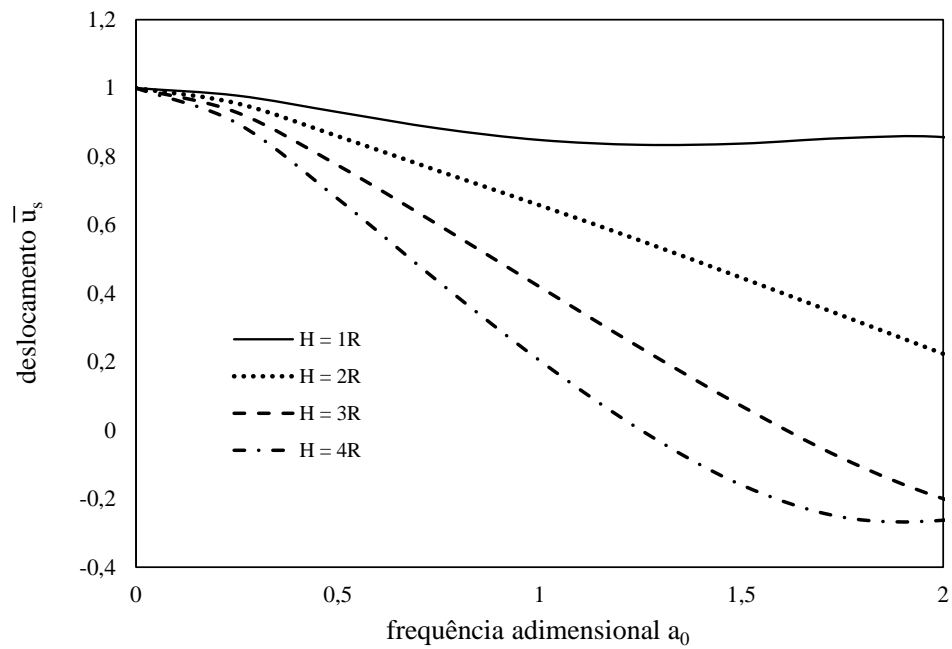


(a) Parte real.

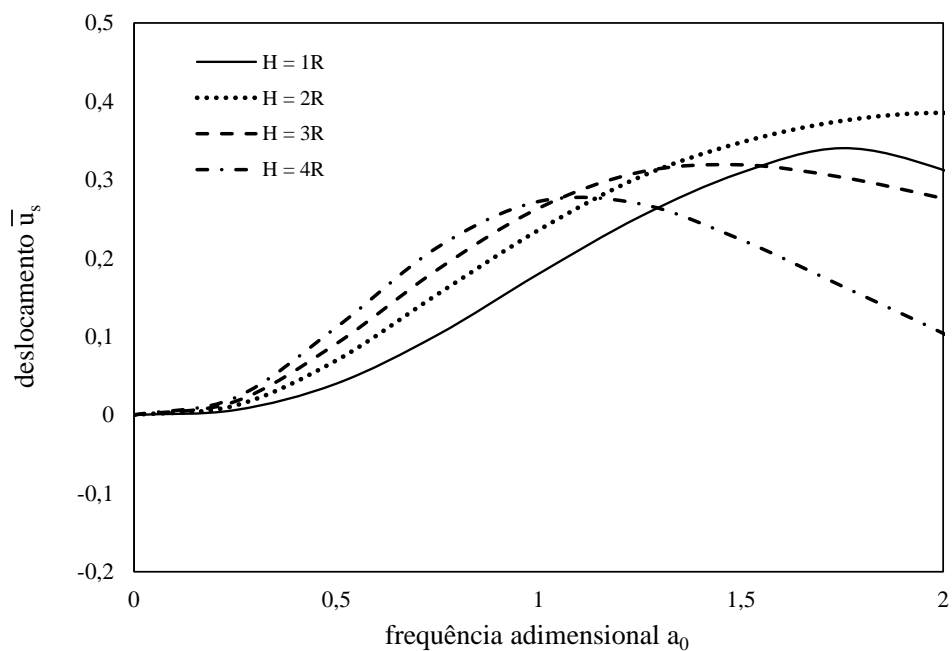


(b) Parte imaginária.

Figura 45 – Deslocamento vertical no centro da base do poço devido a uma carga anelar radial.

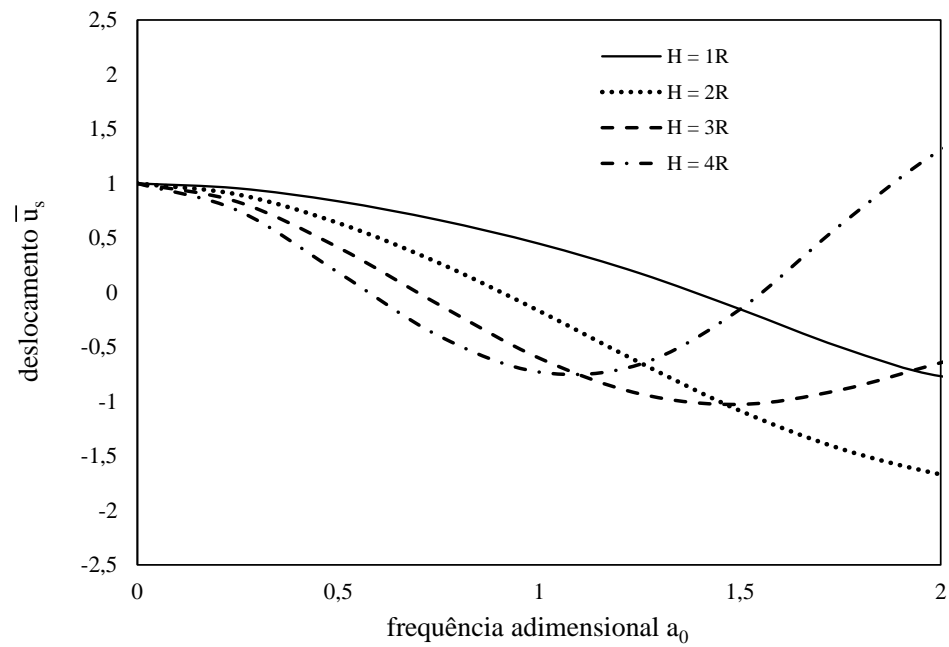


(a) Parte real.

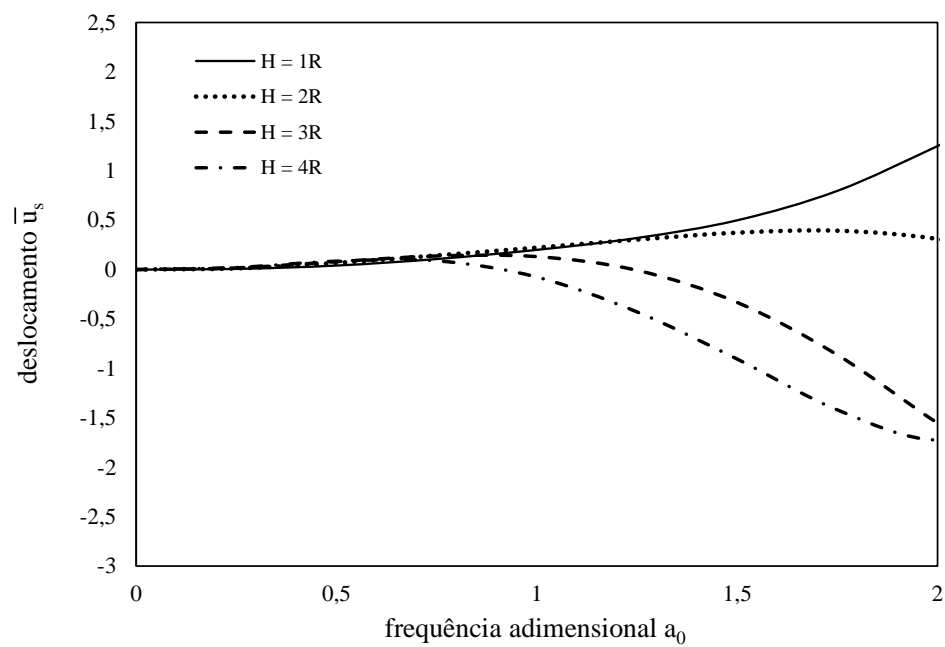


(b) Parte imaginária.

Figura 46 – Deslocamento vertical no topo do poço devido a uma onda P.

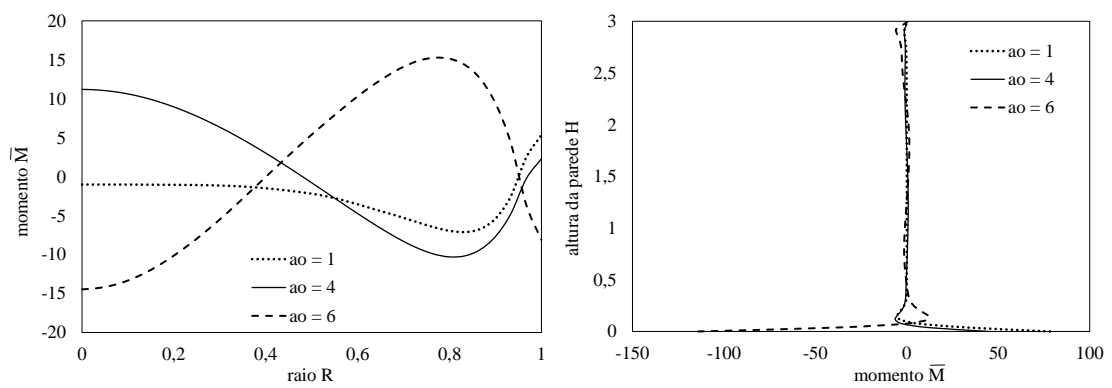


(a) Parte real.

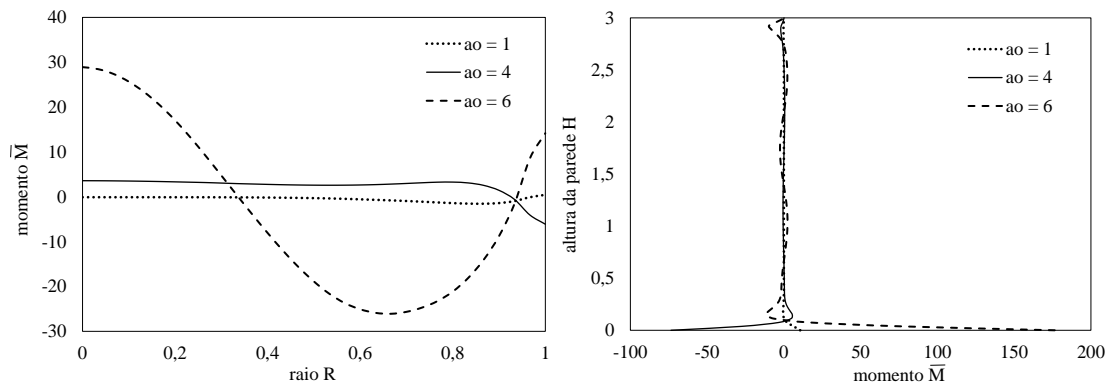


(b) Parte imaginária.

Figura 47 – Deslocamento vertical no topo do poço devido a uma carga anelar radial.



(a) Parte real do momento da base e da parede respectivamente.



(b) Parte imaginária do momento da base e da parede respectivamente.

Figura 48 – Momentos causados devido à uma onda P.

8 Conclusões e Sugestões

Apresentou-se a formulação e implementação para a análise de poços de grande diâmetro com diferentes dimensões em um meio elástico isotrópico submetidos a diferentes tipos carregamentos dinâmicos.

A formulação de elementos finitos apresentou resultados muito próximos das soluções analíticas. Os elementos desenvolvidos aqui podem ser utilizados em diversas aplicações de engenharia para diferentes casos de carga, além de não necessitarem de integrais numéricas para se obter as matrizes dos elementos. O elemento finito retangular pode ser aplicado, por exemplo, ao estudo de lajes de uma forma geral e à algumas estruturas retangulares, como muros de contenção. Os elementos finitos axissimétricos podem ser aplicados ao estudo de estruturas circulares como reservatórios e silos.

A utilização dos elementos de contorno se mostra como uma alternativa ao modelo de molas de Winkler para a modelagem do solo, além de ser possível obter os deslocamentos e as tensões em qualquer local do solo. A desvantagem é a dificuldade em se obter as funções de influência necessárias para o cálculo, que em problemas de elastodinâmica, na maioria das vezes não apresentam solução analítica, devendo-se recorrer ao uso de integrais numéricas, as quais, na maioria dos casos, são feitas para funções mal comportadas que podem gerar erros no resultado final.

O método de acoplamento desenvolvido é adequado a certas aplicações que envolvem interação dinâmica solo-estrutura, se mostrando eficiente e relativamente simples. Como visto nas diversas aplicações onde o método foi utilizado, como placas de diferentes formatos e estacas, foi possível fazer uma validação com a literatura a partir das considerações adequadas para cada caso. Observa-se também que poderia ser utilizado outro método numérico para discretizar a estrutura, tal como o método das diferenças finitas. A diferença se daria nos valores das matrizes, mas o acoplamento em si seguiria as mesmas premissas.

A modelagem do poço apresenta a vantagem de poder ser usada a outras aplicações, como estacas de seção circular, quando o diâmetro do poço é muito menor que sua altura, submetidas a carregamentos axiais. A modelagem do poço também pode ser estendida para o caso de placas circulares na superfície submetidas a carregamentos dinâmicos, tanto na direção radial quanto na direção vertical. A formulação desenvolvida ainda pode ser estendida para a análise de valas circulares como forma de barreira de vibrações, ou mesmo para placas retangulares ou circulares flexíveis estaqueadas, entre outros casos em que exista axissimetria.

O comportamento do poço pode ser simulado para qualquer tipo de carregamento harmônico axissimétrico, inclusive para o caso estático, sendo este um caso particular de um carregamento dinâmico. A análise de poços pode ser feita ainda para outros tipos de carregamentos não implementados neste trabalho que não sejam axissimétricos, como ondas de cisalhamento, ondas Rayleigh e ondas Love. Os carregamentos assimétricos pode ser expressos

em função da soma de diferentes carregamentos axissimétricos. Assim, uma proposta para trabalhos futuros seria a implementação de cargas assimétricas.

Outra sugestão seria o desenvolvimento de formulação para a análise de casos em que os materiais são elasticamente não-lineares, ou mesmo, considerar casos de plasticidade do solo. Sabe-se que os elementos de contorno não são a melhor técnica para análises não-lineares, porém já existe formulação na literatura analisando casos similares que poderiam servir como base para o desenvolvimento de uma formulação conjunta entre o MEF e o MEC.

Ensaio de campo para que se pudessem validar os modelos numéricos foram encontrados na literatura, porém os trabalhos não apresentavam resultados de forma a possibilitar a comparação. A medição de situações reais através da instrumentação já existente para a verificação de deslocamentos de poços e também de ensaios geofísicos seriam ideais para que os resultados dos modelos numéricos pudessem ser confirmados e usados com segurança para o correto dimensionamento da estrutura do poço. Além disso, podem ser feitos ensaios em laboratório através da utilização de *shakers* para problemas dinâmicos.

Referências

- ADINI, A.; CLOUGH, R. W. *Analysis of plate bending by the finite element method*. [S.l.], 1961.
- ADREGO, J. A. C. G. B. *Numerical Analysis Of The Excavation Of A Shaft In London Clay*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade De Engenharia Da Universidade Do Porto, 2014. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/76564>>.
- ALMEIDA, F. P. A. *Aplicação do Acoplamento Entre o MEC e MEF para o Estudo da Interação Dinâmica Elastoplástica entre Solo e Estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2003. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-20062006-154024/pt-br.php>>.
- ALMEIDA, F. P. A.; CODA, H. B. Aplicação do acoplamento entre o mec e mef para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre solo e estruturas. *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, v. 7, n. 29, p. 113–129, 2005. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova_versao/pdf/cee29_113.pdf>.
- AMIRI-HEZAVEH, A. et al. Impedance functions for surface rigid rectangular foundations on transversely isotropic multilayer half-spaces. *Journal of Applied Mechanics*, ASME International, v. 80, n. 5, p. 051017, jul 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115%2F1.4023626>>.
- ANTES, H. A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier BV, v. 1, n. 4, p. 313–322, dec 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0168-874x%2885%2990029-0>>.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. *Energy Theorems and Structural Analysis*. Springer US, 1960. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2F978-1-4899-5850-1>>.
- ARIMAN, T.; MULESKI, G. E. A review of the response of buried pipelines under seismic excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 9, n. 2, p. 133–152, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Feqe.4290090204>>.
- ATHANASIADIS, G. Direct and indirect boundary element methods for solving the heat conduction problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier BV, v. 49, n. 1, p. 37–54, may 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0045-7825%2885%2990049-0>>.
- AUERSCH, L. Dynamic plate-soil interaction — finite and infinite, flexible and rigid plates on homogeneous, layered or winkler soil. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 15, p. 51–59, 1996. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0267726195000216>>.
- BARROS, P. L. A. *Elastodinâmica de meios transversalmente isotrópicos: funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na interação solo-estrutura*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1997. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000115806>>.

BARROS, P. L. A. Dynamic axial response of single piles embedded in transversely isotropic soils. In: *ASCE Engineering Mechanics Conference*. [S.l.: s.n.], 2003.

BARROS, P. L. A. Impedances of rigid cylindrical foundations embedded in transversely isotropic soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley-Blackwell, v. 30, n. 7, p. 683–702, jun 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/2Fnag.496>.

BARROS, R. M. de. *Funções de Green e de Influência para Meios Visco-Elásticos Transversalmente Isotrópicos no Domínio da Frequência*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2001. Disponível em: <http://unicamp.sibi.usp.br/handle/SBURI/14995>.

BERNARDES, S. F. D. S. *Aspectos Críticos No Dimensionamento De Poços Elípticos Pelo Método De Escavação Sequencial - O Caso Da Estação De Metro Do Marquês*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade De Engenharia Da Universidade Do Porto, 2010. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/61518>.

BETTESS, P. Infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley-Blackwell, v. 11, n. 1, p. 53–64, 1977. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/2Fnme.1620110107>.

BETTESS, P. More on infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley-Blackwell, v. 15, n. 11, p. 1613–1626, nov 1980. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/2Fnme.1620151105>.

BEZINE, G. A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley-Blackwell, v. 17, n. 11, p. 1647–1657, nov 1981. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/2Fnme.1620171106>.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier BV, v. 1, n. 7, p. 372–378, dec 1977. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0020-7179\(77\)90046-4](https://doi.org/10.1016/0020-7179(77)90046-4).

CARVALHO, J. T. *Comportamento Dinâmico das Lajes Flutuantes de Vias Permanentes em Sistemas Metroferroviários*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-21052015-115006/pt-br.php>.

CECILIO, M. O. et al. Estação vila prudente do metrô de são paulo análise numérica tridimensional dos poços de grande diâmetro. In: *Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica*. [S.l.: s.n.], 2010.

CHEN, C.-H.; PENZIEN, J. Dynamic modelling of axisymmetric foundations. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 14, p. 823–840, 1985. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/eqe.4290140602/abstract>.

CHENG, Y.; HU, Y. Active earth pressure on circular shaft lining obtained by simplified slip line solution with general tangential stress coefficient. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, Chinese J. Geot. Eng., v. 27, n. 1, p. 110, 2005. Disponível em: http://www.cgejournal.com/EN/abstract/article_11567.shtml.

- CHO, J. et al. Analysis of lateral earth pressure on a vertical circular shaft considering the 3d arching effect. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Elsevier BV, v. 48, p. 11–19, apr 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.tust.2015.01.002>>.
- CHOPRA, A. K. et al. Earthquake analysis of earth dams. In: *4th World Conference on Earthquake Engineering*. [s.n.], 1969. Disponível em: <http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/4_vol3_A5-55.pdf>.
- CLOUGH, R. W.; TOCHE, J. L. Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. In: *Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright -Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio: [s.n.], 1965. p. 515–545. Disponível em: <<http://contrails.iit.edu/reports/8574>>.
- CORTIZO, P. T. *Análise de Poços de Grande Diâmetro Executados pelo Método de Escavação Sequencial na Vertical*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, 2015. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000957136>>.
- COSTANTINO, C.; MILLER, C.; LUFRANO, L. Soil-structure interaction parameters from finite element analysis. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier BV, v. 38, n. 2, p. 289–302, aug 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0029-5493%2876%2990103-5>>.
- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society (AMS), v. 49, n. 1, p. 1–24, jan 1943. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090%2Fs0002-9904-1943-07818-4>>.
- CROUCH, S.; STARFIELD, A. M. *Boundary Element Methods in Solid Mechanics: With Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering*. [S.l.]: George Allen & Unwin, 1983.
- CRUSE, T. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier BV, v. 5, n. 12, p. 1259–1274, dec 1969. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0020-7683%2869%2990071-7>>.
- CRUSE, T.; RIZZO, F. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. i. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier BV, v. 22, n. 1, p. 244–259, apr 1968. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0022-247x%2868%2990171-6>>.
- DIAS, C. D. C. *Comportamento Hidro-Mecânico De Escavações Em Condições Não Saturadas*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade De Engenharia Da Universidade Do Porto, 2011. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/63358>>.
- DIAS, T. G. S. *Metodologia de Avaliação de Sistemas de Suporte em Concreto Projetado - Estudo de Caso em Poços de Grande Diâmetro*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2013. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/12770>>.
- Dominguez, J.; Roesset, J. M. Response of embedded foundations to travelling waves. *NASA STI/Recon Technical Report N*, v. 79, ago. 1978.
- EMPERADOR, J. M.; DOMINGUEZ, J. Dynamic response of axisymmetric embedded foundations. *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, v. 18, p. 1105–1117, 1989. Disponível em: <<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/eqe.4290180803/full>>.

ESTORFF, O. von; KAUSEL, E. Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 18, n. 7, p. 1065–1075, oct 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Feqe.4290180711>>.

FILHO, R. M.; MENDONÇA, A. V.; PAIVAA, J. B. Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, p. 195–203, 2005. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799704001614>>.

FREDHOLM, I. Solution d'un problème fondamental de la theorie de l'élasticité. *Arkiv Mat. Astro. Fysik*, v. 2, 1905.

GAZETAS, G. Analysis of machine foundation vibrations: State of the art. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier BV, v. 2, n. 1, p. 2–42, jan 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0261-7277%2883%2990025-6>>.

GOMES, A. T. *Poços Elípticos Pelo Método De Escavação Sequencial Na Vertical O Caso Do Metro Do Porto*. Tese (Doutorado) — Faculdade De Engenharia Da Universidade Do Porto, 2008. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/60501>>.

GÓMEZ-MASSÓ, A.; ATTALLA, I. Finite element versus simplified methods in the seismic analysis of underground structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 12, n. 3, p. 347–367, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Feqe.4290120305>>.

GÓMEZ-MASSÓ, A. et al. Soil-structure interaction with rayleigh waves. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 11, n. 4, p. 567–583, jul 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Feqe.4290110409>>.

GOTO, Y.; SHIRASUNA, T. Studies on earthquake-resistant design of grouped underground tanks in soft ground. In: *Proceedings Of The Eighth World Conference On Earthquake Engineering*. San Francisco, California: [s.n.], 1984. v. 7, p. 405–412. Disponível em: <http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/8_vol7_405.pdf>.

GUERRA, C. S.; BARROS, P. L. A.; PAVANELLO, R. Dynamic behavior of flexible plates supported by a transversely isotropic half-space. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, n. 8, p. 16–30, 2017. Disponível em: <<http://periodicos.unb.br/index.php/ripe/article/view/23669/16992>>.

HASHASH, Y. M. et al. Seismic design and analysis of underground structures. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Elsevier BV, v. 16, n. 4, p. 247–293, oct 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fs0886-7798%2801%2900051-7>>.

HATANAKA, M. *Fundamental Considerations on the Earthquake Resistant Properties of the Earth Dam. Part I On the Vibration of Earth Dam*. [S.l.], 1955. Disponível em: <<https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/123661/1/b11p0n000p01.pdf>>.

JAWSON, M. A.; MAITI, M. An integral equation formulation of plate bending problems. *Journal of Engineering Mathematics*, 1968. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/BF01534962>>.

KARABALIS, D. L.; BESKOS, D. E. Dynamic response of 3-d rigid surface foundations by time domain boundary element method. *Earthquake Engineering & Structural*

Dynamics, Wiley-Blackwell, v. 12, n. 1, p. 73–93, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Fge.4290120106>>.

KARABALIS, D. L.; BESKOS, D. E. Dynamic response of 3-d flexible foundations by time domain BEM and FEM. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier BV, v. 4, n. 2, p. 91–101, apr 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0261-7277%2885%2990004-x>>.

KARABALIS, D. L.; BESKOS, D. E. Dynamic response of 3-d embedded foundations by the boundary element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier BV, v. 56, n. 1, p. 91–119, may 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0045-7825%2886%2990138-6>>.

KWON, Y. W.; BANG, H. *The Finite Element Method Using MATLAB*. 2nd. ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 2000. ISBN 0849309182.

LABAKI, J. *Vibration of flexible and rigid plates on transversely isotropic layered media*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Unicamp, 2012. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000877688>>.

LAMB, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 203, n. 359-371, p. 1–42, jan 1904. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098%2Frsta.1904.0013>>.

LANZANO, G.; BILOTTA, E.; RUSSO, G. Tunnels under seismic loading: a review of damage case histories and protection methods. In: *Fabbrocino & Santucci de Magistris eds.* [s.n.], 2008. Disponível em: <<http://www.reluis.it/doc/pdf/Pubblicazioni/Lanzano-Bilotta-Russo.pdf>>.

LIAO, Z.; WONG, H. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation. *International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Elsevier BV, v. 3, n. 4, p. 174–183, oct 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0261-7277%2884%2990033-0>>.

LIU, F.; WANG, J.; ZHANG, L. Axi-symmetric active earth pressure obtained by the slip line method with a general tangential stress coefficient. *Computers and Geotechnics*, Elsevier BV, v. 36, n. 1-2, p. 352–358, jan 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.compgeo.2008.02.002>>.

LOPES, A. P. *Análise Estática e Dinâmica de Problemas de Interação Solo-Estrutura utilizando os Métodos dos Elementos Finitos e Infinitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2003. Disponível em: <<http://www.pecc.unb.br/wp-content/uploads/dissertacoes/M03-1A-Arlindo-Lopes.pdf>>.

LOVE, A. E. H. *Some Problems of Geodynamics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1911.

MANOLIS, G. D.; BESKOS, D. E. Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and laplace transform. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley-Blackwell, v. 17, n. 4, p. 573–599, apr 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Fnme.1620170407>>.

MANSUR, W.; BREBBIA, C. Numerical implementation of the boundary element method for two dimensional transient scalar wave propagation problems. *Applied*

Mathematical Modelling, Elsevier BV, v. 6, n. 4, p. 299–306, aug 1982. Disponível em: <https://doi.org/10.1016%2Fs0307-904x%2882%2980038-3>.

MELOSH, R. J. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. *Journal of the Aerospace Sciences*, v. 28, n. 1, p. 34–42, 1961. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/8.8850>.

MIKHLIN, S. G. *Integral Equations And Their Applications to Certain Problems in Mechanics, Mathematical Physics and Technology*. [S.l.]: Elsevier Science, 1957.

NETO, M. et al. *Engineering Computation of Structures: The Finite Element Method*. Springer-Verlag GmbH, 2015. ISBN 3319177095. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-319-17710-6_3.

NEWMARK, N. M. Problems in wave propagation in soil and rock. In: *International Symposium on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*. [s.n.], 1968. Disponível em: <http://cedb.asce.org/CEDBsearch/record.jsp?dockey=0282556>.

OKAMOTO, S.; TAMURA, C. Behaviour of subaqueous tunnels during earthquakes. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 1, n. 3, p. 253–266, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1002%2Feqe.4290010306>.

PAIVA, J. B. de. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Flexão de Placas e suas Aplicações em Engenharia de Estruturas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1987. Disponível em: http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1987DO_JoaoBatistadePaiva.pdf.

PARDOEN, G. C.; HAGEN, R. L. Symmetrical bending of circular plates using finite elements. *Computers and Structures*, v. 2, p. 547–553, 1972. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794972900077>.

PLEWMAN, R. P.; DEIST, F. H.; ORTLEPP, W. D. The development and application of a digital computer method for the solution of strata control problems. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 1969. Disponível em: <https://www.saimm.co.za/Journal/v070n12p379.pdf>.

PRATER, E. G. An examination of some theories of earth pressure on shaft linings. *Canadian Geotechnical Journal*, Canadian Science Publishing, v. 14, n. 1, p. 91–106, feb 1977. Disponível em: <https://doi.org/10.1139%2Fgt77-007>.

PRZEMIENIECKI, J. S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1968.

QUINLAN, P. M. The elastic theory of soil dynamics. In: *Symposium on Dynamic Testing of Soils*. [s.n.], 1954. p. 3–34. Disponível em: https://www.astm.org/DIGITAL_LIBRARY/STP/PAGES/STP49601S.htm.

RAJAPAKSE, R. K. N. D.; SHAH, A. H. On the longitudinal harmonic motion of an elastic bar embedded in an elastic half-space. *International Journal of Solids and Structures*, v. 23, p. 267–285, 1987. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768387900606>.

- RAJAPAKSE, R. K. N. D.; WANG, Y. Green's functions for transversely isotropic elastic half space. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 119, n. 9, p. 1724–1746, September 1993. Disponível em: <[http://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1993\)119:3A9\(1724\)](http://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:3A9(1724))>.
- RAYLEIGH, L. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press (OUP), s1-17, n. 1, p. 4–11, nov 1885. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112%2Fplms%2Fs1-17.1.4>>.
- REISSNER, E. Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde masse erregte schwingungen eines homogenen elastischen halbraumes. *Ingenieur-Archiv*, Springer Nature, v. 7, n. 6, p. 381–396, dec 1936. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fbf02090427>>.
- RIBEIRO, D. B. *Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-14012011-102258/pt-br.php>>.
- RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. de. An alternative be–fe formulation for a raft resting on a finite soil layer. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 50, p. 352–359, 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799714002409>>.
- RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1967. Disponível em: <<http://www.ams.org/journals/qam/1967-25-01/S0033-569X-1967-99907-9/S0033-569X-1967-99907-9.pdf>>.
- RODRIGUES, C. Y. C. *Análise de Estruturas Axissimétricas - Aplicação a Reservatórios Circulares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Técnica de Lisboa, 2009. Disponível em: <<https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395139427472/dissertacao.pdf>>.
- ROMANEL, C. *A global-local approach for dynamic soil-structure interaction analysis of deeply embedded structures in a layered medium*. Tese (Doutorado) — University of Arizona, 1989. Disponível em: <<http://arizona.openrepository.com/arizona/handle/10150/184762>>.
- SALAMON, M. D. G. Elastic analysis of displacements and stresses induced by mining of seam or reef deposits. *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, v. 64, p. 197–218, 1964. Disponível em: <<http://journals.co.za/docserver/fulltext/saimm/65/5/4952.pdf?expires=1495761215&id=id&accname=guest&checksum=5629E57238A4EF31E024FE9FC77C596B>>.
- SAVIDIS, S. A.; RICHTER, T. Dynamic response of elastic plates on the surface of the half-space. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley-Blackwell, v. 3, n. 3, p. 245–254, jul 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Fnag.1610030304>>.
- SCANLAN, R. H. Seismic wave effects on soil-structure interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 4, n. 4, p. 379–388, apr 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2Feqe.4290040405>>.
- SHIRASUNA, T.; GOTO, Y. Response behavior of large scale underground tank during earthquake. In: *Proceedings Of The Eighth World Conference On Earthquake Engineering*. San Francisco, California: [s.n.], 1984. v. 7, p. 413–420. Disponível em: <http://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/8_vol7_413.pdf>.

SMITH, W. D. The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 42, n. 2, p. 747–768, apr 1975. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111%2Fj.1365-246x.1975.tb05890.x>>.

SPYRAKOS, C.; ANTES, H. Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: A comparative study. *Computers & Structures*, Elsevier BV, v. 24, n. 4, p. 529–535, jan 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2F0045-7949%2886%2990191-4>>.

SUNG, T. Y. Vibrations in semi-infinite solids due to periodic surface loading. In: *ASTM Special Technical Publication*. [s.n.], 1954. p. 35–64. Disponível em: <https://www.astm.org/DIGITAL_LIBRARY/STP/PAGES/STP49602S.htm>.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1951.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1959. (Engineering societies monographs). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=rTQFAAAAMAAJ>>.

TOBAR, T.; MEGUID, M. A. Comparative evaluation of methods to determine the earth pressure distribution on cylindrical shafts: A review. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Elsevier BV, v. 25, n. 2, p. 188–197, mar 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.tust.2009.11.001>>.

TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 23, n. 9, p. 805–823, sep 1956. Disponível em: <<https://doi.org/10.2514%2F8.3664>>.

VELETSOS, A. S.; YOUNAN, A. H. Dynamic soil pressures on vertical walls. In: *International Conferences on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. [s.n.], 1995. Disponível em: <<http://scholarsmine.mst.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3283&context=icrageesd>>.

WERKLE, H. Dynamic finite element analysis of three-dimensional soil models with a transmitting element. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley-Blackwell, v. 14, n. 1, p. 41–60, jan 1986. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002%2F8.4290140104>>.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. Finite elements in the solution of field problems. *The Engineer*, p. 507–510, 1956. Disponível em: <<http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2004/IFEM/Aids/FEM-Classics/Zienkiewicz-Cheung.pdf>>.

Apêndices

APÊNDICE A – Matrizes de Rigidez e de Massa dos Elementos Finitos

Apresentam-se neste apêndice as matrizes de rigidez e de massa dos elementos finitos utilizados neste trabalho, além de algumas funções de forma e vetores de carga equivalente.

Elemento Finito Retangular

O vetor de cargas aplicadas nos nós $\{P_{ap}\}$, o vetor de deslocamentos e rotações nodais $\{u_{no}\}$, a matriz de rigidez $[K]$, a matriz de massa $[M]$ e o vetor de cargas nodais equivalentes $\{F\}$ a um carregamento distribuído q_z , para o elemento retangular, são:

- Vetor de cargas aplicadas nos nós $\{P_{ap}\}$:

$$\{P_{ap}\}^T = \left\{ F_a \quad M_{xa} \quad M_{ya} \quad F_b \quad M_{xb} \quad M_{yb} \quad F_c \quad M_{xc} \quad M_{yc} \quad F_d \quad M_{xd} \quad M_{yd} \right\}$$

- Vetor de deslocamentos e rotações nodais $\{u_{no}\}$:

$$\{u_{no}\}^T = \left\{ w_a \quad \theta_{xa} \quad \theta_{ya} \quad w_b \quad \theta_{xb} \quad \theta_{yb} \quad w_c \quad \theta_{xc} \quad \theta_{yc} \quad w_d \quad \theta_{xd} \quad \theta_{yd} \right\}$$

- Matriz de rigidez $[K]$:

$$[K] = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)} [k]$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & & & & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & & & & & & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & & & & & & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & & & & & & & & \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & & & & & & & \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & & & & & & \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & & & & & \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & & & & \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} & & & \\ k_{101} & k_{102} & k_{103} & k_{104} & k_{105} & k_{106} & k_{107} & k_{108} & k_{109} & k_{1010} & & \\ k_{111} & k_{112} & k_{113} & k_{114} & k_{115} & k_{116} & k_{117} & k_{118} & k_{119} & k_{1110} & k_{1111} & \\ k_{121} & k_{122} & k_{123} & k_{124} & k_{125} & k_{126} & k_{127} & k_{128} & k_{129} & k_{1210} & k_{1211} & k_{1212} \end{bmatrix} \quad \text{sim.}$$

onde

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{2 [10l_x^4 + 10l_y^4 + l_x^2 l_y^2 (7 - 2\nu)]}{5l_x^3 l_y^3}, k_{21} = \frac{1 + 10\frac{l_x^2}{l_y^2} + 4\nu}{5l_x}, \\
k_{22} &= \frac{4 [5l_x^2 - l_y^2 (\nu - 1)]}{15l_x l_y}, k_{31} = -\frac{10l_y^2 + l_x^2 (1 + 4\nu)}{5l_x^2 l_y}, \\
k_{32} &= -\nu, k_{33} = \frac{4 [5l_y^2 - l_x^2 (\nu - 1)]}{15l_x l_y}, \\
k_{41} &= \frac{2 [5l_x^4 - 10l_y^4 + l_x^2 l_y^2 (2\nu - 7)]}{5l_x^3 l_y^3}, k_{42} = \frac{-1 + 5\frac{l_x^2}{l_y^2} - 4\nu}{5l_x}, \\
k_{43} &= \frac{1 + 10\frac{l_y^2}{l_x^2} - \nu}{5l_y}, k_{44} = \frac{2 [10l_x^4 + 10l_y^4 + l_x^2 l_y^2 (7 - 2\nu)]}{5l_x^3 l_y^3}, \\
k_{51} &= \frac{-1 + 5\frac{l_x^2}{l_y^2} - 4\nu}{5l_x}, k_{52} = \frac{2 [5l_x^2 + 2l_y^2 (\nu - 1)]}{15l_x l_y}, \\
k_{53} &= 0, k_{54} = \frac{1 + 10\frac{l_x^2}{l_y^2} + 4\nu}{5l_x}, \\
k_{55} &= \frac{4 [5l_x^2 - l_y^2 (\nu - 1)]}{15l_x l_y}, k_{61} = \frac{-10l_y^2 + l_x^2 (\nu - 1)}{5l_x^2 l_y}, \\
k_{62} &= 0, k_{63} = \frac{10l_y^2 + l_x^2 (\nu - 1)}{15l_x l_y}, \\
k_{64} &= \frac{1 + 10\frac{l_y^2}{l_x^2} + 4\nu}{5l_y}, k_{65} = \nu, \\
k_{66} &= \frac{4 [5l_y^2 - l_x^2 (\nu - 1)]}{15l_x l_y}, k_{71} = -\frac{2 [5l_x^4 + 5l_y^4 + l_x^2 l_y^2 (2\nu - 7)]}{5l_x^3 l_y^3}, \\
k_{72} &= \frac{1 - 5\frac{l_x^2}{l_y^2} - \nu}{5l_x}, k_{73} = \frac{5l_y^2 + l_x^2 (\nu - 1)}{5l_x^2 l_y}, \\
k_{74} &= \frac{2 [-10l_x^4 + 5l_y^4 + l_x^2 l_y^2 (2\nu - 7)]}{5l_x^3 l_y^3}, k_{75} = \frac{-1 - 10\frac{l_x^2}{l_y^2} + \nu}{5l_x}, \\
k_{76} &= \frac{-1 + 5\frac{l_y^2}{l_x^2} - 4\nu}{5l_y}, k_{77} = \frac{2 [10l_x^4 + 10l_y^4 + l_x^2 l_y^2 (7 - 2\nu)]}{5l_x^3 l_y^3}, \\
k_{81} &= \frac{5l_x^2 + l_y^2 (\nu - 1)}{5l_x l_y^2}, k_{82} = \frac{5l_x^2 - l_y^2 (\nu - 1)}{15l_x l_y}, \\
k_{83} &= 0, k_{84} = \frac{1 + 10\frac{l_y^2}{l_x^2} - \nu}{5l_x}, \\
k_{85} &= \frac{10l_x^2 + l_y^2 (\nu - 1)}{15l_x l_y}, k_{86} = 0, \\
k_{87} &= -\frac{10l_x^2 + l_y^2 (1 + 4\nu)}{5l_x l_y^2}, k_{88} = \frac{4 [5l_x^2 - l_y^2 (\nu - 1)]}{15l_x l_y}, \\
k_{91} &= \frac{1 - 5\frac{l_y^2}{l_x^2} - \nu}{5l_y}, k_{92} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{93} &= \frac{5l_y^2 - l_x^2(\nu - 1)}{15l_xl_y}, k_{94} = \frac{-1 + 5\frac{l_y^2}{l_x^2} - 4\nu}{5l_y}, \\
k_{95} &= 0, k_{96} = \frac{2[5l_y^2 + 2l_x^2(1 - \nu)]}{15l_xl_y}, \\
k_{97} &= \frac{1 + 10\frac{l_y^2}{l_x^2} + 4\nu}{5l_y}, k_{98} = -\nu, \\
k_{99} &= \frac{4[5l_y^2 - l_x^2(1 - \nu)]}{15l_xl_y}, k_{101} = \frac{2[-10l_x^4 + 5l_y^4 + l_x^2l_y^2(2\nu - 7)]}{5l_x^3l_y^3}, \\
k_{102} &= \frac{-1 - 10\frac{l_x^2}{l_y^2} + \nu}{5l_x}, k_{103} = \frac{1 - 5\frac{l_y^2}{l_x^2} + 4\nu}{5l_y}, \\
k_{104} &= -\frac{2[5l_x^4 + 5l_y^4 + l_x^2l_y^2(2\nu - 7)]}{5l_x^3l_y^3}, k_{105} = \frac{1 - 5\frac{l_x^2}{l_y^2} - \nu}{5l_x}, \\
k_{106} &= \frac{1 - 5\frac{l_y^2}{l_x^2} - \nu}{5l_y}, k_{107} = \frac{2[5l_x^4 - 10l_y^4 + l_x^2l_y^2(2\nu - 7)]}{5l_x^3l_y^3}, \\
k_{108} &= \frac{1 - 5\frac{l_x^2}{l_y^2} + 4\nu}{5l_x}, k_{109} = \frac{-10l_y^2 + l_x^2(\nu - 1)}{5l_x^2l_y}, \\
k_{1010} &= \frac{2[10l_x^4 + 10l_y^4 + l_x^2l_y^2(7 - 2\nu)]}{5l_x^3l_y^3}, k_{111} = \frac{1 + 10\frac{l_x^2}{l_y^2} - \nu}{5l_x}, \\
k_{112} &= \frac{10l_x^2 + l_y^2(\nu - 1)}{15l_xl_y}, k_{113} = 0, \\
k_{114} &= \frac{5l_x^2 + l_y^2(\nu - 1)}{5l_xl_y^2}, k_{115} = \frac{5l_x^2 - l_y^2(\nu - 1)}{15l_xl_y}, \\
k_{116} &= 0, k_{117} = \frac{1 - 5\frac{l_x^2}{l_y^2} + 4\nu}{5l_x}, \\
k_{118} &= \frac{2[5l_x^2 + 2l_y^2(\nu - 1)]}{15l_xl_y}, k_{119} = 0, \\
k_{1110} &= -\frac{10l_x^2 + l_y^2(1 + 4\nu)}{5l_xl_y^2}, k_{1111} = \frac{4[5l_x^2 - l_y^2(\nu - 1)]}{15l_xl_y}, \\
k_{121} &= \frac{1 - 5\frac{l_y^2}{l_x^2} + 4\nu}{5l_y}, k_{122} = 0, \\
k_{123} &= \frac{2[5l_y^2 + 2l_x^2(\nu - 1)]}{15l_xl_y}, k_{124} = \frac{5l_y^2 + l_x^2(\nu - 1)}{5l_x^2l_y}, \\
k_{125} &= 0, k_{126} = \frac{5l_y^2 - l_x^2(\nu - 1)}{15l_xl_y}, \\
k_{127} &= \frac{1 + 10\frac{l_y^2}{l_x^2} - \nu}{5l_y}, k_{128} = 0, \\
k_{129} &= \frac{10l_y^2 + l_x^2(\nu - 1)}{15l_xl_y}, k_{1210} = -\frac{10l_y^2 + l_x^2(1 + 4\nu)}{5l_x^2l_y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{94} &= \frac{199l_x^2l_y}{25200}, m_{95} = \frac{1}{600}l_x^2l_y^2, m_{96} = \frac{1}{630}l_x^3l_y, \\
m_{97} &= \frac{461l_x^2l_y}{25200}, m_{98} = -\frac{1}{400}l_x^2l_y^2, m_{99} = \frac{1}{315}l_x^3l_y, \\
m_{101} &= \frac{613l_xl_y}{12600}, m_{102} = \frac{137l_xl_y^2}{12600}, m_{103} = -\frac{199l_x^2l_y}{25200}, \\
m_{104} &= \frac{197l_xl_y}{12600}, m_{105} = \frac{29l_xl_y^2}{6300}, m_{106} = \frac{29l_x^2l_y}{6300}, \\
m_{107} &= \frac{613l_xl_y}{12600}, m_{108} = -\frac{199l_xl_y^2}{25200}, m_{109} = \frac{137l_x^2l_y}{12600}, \\
m_{110} &= \frac{1727l_xl_y}{12600}, m_{111} = -\frac{137l_xl_y^2}{12600}, m_{112} = -\frac{1}{420}l_xl_y^3, \\
m_{113} &= \frac{1}{600}l_x^2l_y^2, m_{114} = -\frac{29l_xl_y^2}{6300}, m_{115} = -\frac{1}{840}l_xl_y^3, \\
m_{116} &= -\frac{1}{900}l_x^2l_y^2, m_{117} = -\frac{199l_xl_y^2}{25200}, m_{118} = \frac{1}{630}l_xl_y^3, \\
m_{119} &= -\frac{1}{600}l_x^2l_y^2, m_{1110} = -\frac{461l_xl_y^2}{25200}, m_{1111} = \frac{1}{315}l_xl_y^3, \\
m_{121} &= -\frac{199l_x^2l_y}{25200}, m_{122} = -\frac{1}{600}l_x^2l_y^2, m_{123} = \frac{1}{630}l_x^3l_y, \\
m_{124} &= -\frac{29l_x^2l_y}{6300}, m_{125} = -\frac{1}{900}l_x^2l_y^2, m_{126} = -\frac{1}{840}l_x^3l_y, \\
m_{127} &= -\frac{137l_x^2l_y}{12600}, m_{128} = \frac{1}{600}l_x^2l_y^2, m_{129} = -\frac{1}{420}l_x^3l_y, \\
m_{1210} &= -\frac{461l_x^2l_y}{25200}, m_{1211} = \frac{1}{400}l_x^2l_y^2, m_{1212} = \frac{1}{315}l_x^3l_y
\end{aligned}$$

- Vetor de cargas nodais equivalentes $\{F\}$ a um carregamento distribuído q_z :

$$\{F\} = q_z \left\{ \begin{array}{c} \frac{l_xl_y}{4} \\ \frac{1}{24}l_xl_y^2 \\ -\frac{1}{24}l_x^2l_y \\ \frac{l_xl_y}{4} \\ \frac{1}{24}l_xl_y^2 \\ \frac{1}{24}l_x^2l_y \\ \frac{l_xl_y}{4} \\ -\frac{1}{24}l_xl_y^2 \\ \frac{1}{24}l_x^2l_y \\ \frac{l_xl_y}{4} \\ -\frac{1}{24}l_xl_y^2 \\ -\frac{1}{24}l_x^2l_y \end{array} \right\}$$

Elemento Finito de Placa Circular

O elemento finito de placa circular apresenta dois efeitos separados, o de membrana e o de flexão. Assim, as matrizes referentes ao efeito de membrana são apresentadas primeiramente. Em seguida, apresentam-se as matrizes referentes à flexão e por último apresentam-se as matrizes englobando ambos os efeitos.

- Matriz de rigidez referente ao efeito de membrana (elemento anular):

$$[K] = \frac{E}{(\nu^2 - 1)} \frac{2\pi}{(r_1^2 - r_2^2)} \begin{bmatrix} r_1^2(\nu + 1) - r_2^2(\nu - 1) & -2r_1r_2 \\ -2r_1r_2 & r_2^2(\nu + 1) - r_1^2(\nu - 1) \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez referente ao efeito de membrana (elemento fechamento):

$$[K_f] = -2\pi \frac{E}{\nu - 1}$$

- Matriz de massa referente ao efeito de membrana (elemento anular):

$$[M] = \frac{\pi \rho t_p}{2(r_1^2 - r_2^2)^2} [m]$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = -r_1^2 \left[r_1^4 - 4r_1^2 r_2^2 + 3r_2^4 - 4r_2^4 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right]$$

$$m_{12} = m_{21} = -r_1 r_2 \left[r_1^4 - r_2^4 + 4r_1^2 r_2^2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right]$$

$$m_{22} = r_2^2 \left[3r_1^4 - 4r_1^2 r_2^2 + r_2^4 + 4r_1^4 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right]$$

- Matriz de massa referente ao efeito de membrana (elemento de fechamento):

$$[M_f] = \frac{1}{2} \rho t_p \pi r_2^2$$

- Vetor de carga equivalente referente ao efeito de membrana (elemento anular):

$$\{F\} = \frac{2}{3} q_u \frac{\pi}{(r_1 + r_2)} \begin{Bmatrix} -r_1(r_1 - r_2)(r_1 - 2r_2) \\ r_2(r_2 - r_1)(r_2 - 2r_1) \end{Bmatrix}$$

- Vetor de carga equivalente referente ao efeito de membrana (elemento de fechamento):

$$\{F_f\} = \frac{2}{3} q_u \pi r_2^2$$

A seguir, apresenta-se as matrizes e vetores referentes ao efeito de flexão de placa circular.

- Matriz de rigidez referente ao efeito de flexão (elemento anular):

As funções de forma são dadas por: $\{N\} = \{g\} [\gamma]^T$

$$\{g\} = \left\{ \begin{matrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{matrix} \right\}$$

$$g_1(r) = 1, g_2(r) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2, g_3(r) = \ln\left(\frac{r}{r_1}\right), g_4(r) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{bmatrix}$$

define-se: $\chi = \frac{r_2}{r_1}$ e $\tau = (\chi^2 - 1)^2 - 4\chi^2 \ln^2 \chi$

$$\gamma_{11} = \frac{\chi^2 (\chi^2 - 1 + 2 \ln \chi - 4 \ln^2 \chi)}{\tau}, \gamma_{12} = \frac{(1 - 2\chi^2 \ln \chi - \chi^2)}{\tau},$$

$$\gamma_{13} = \frac{4\chi^2 \ln \chi}{\tau}, \gamma_{14} = \frac{2(\chi^2 - 1)}{\tau},$$

$$\gamma_{21} = \frac{2r_2 \chi \ln^2 \chi}{\tau}, \gamma_{22} = -\gamma_{21}$$

$$\gamma_{23} = \frac{r_2 \chi (\chi^2 - 1 - 2 \ln \chi)}{\tau}, \gamma_{24} = \frac{r_1 (2\chi^2 \ln \chi - \chi^2 + 1)}{\tau}$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{12}, \gamma_{32} = -\gamma_{12},$$

$$\gamma_{33} = -\gamma_{13}, \gamma_{34} = -\gamma_{14},$$

$$\gamma_{41} = \frac{r_2 \ln \chi (\chi^2 - 1)}{\tau}, \gamma_{42} = -\gamma_{41}$$

$$\gamma_{43} = \frac{r_2 (2\chi^2 \ln \chi - \chi^2 + 1)}{\tau}; \gamma_{44} = \frac{r_2 (\chi^2 - 1 - 2 \ln \chi)}{\tau}$$

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$[K] = \frac{\pi D}{\tau} [k]$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & & & \text{sim.} \\ k_{21} & k_{22} & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

onde

$$k_{11} = \frac{16(-1 + \chi^2)}{r_1^2}$$

$$k_{21} = \frac{8(1 - \chi^2 + 2\chi^2 \ln \chi)}{r_1}$$

$$k_{22} = 2 \left\{ -3 + 2\chi^2 + \chi^4 - \nu(-1 + \chi^2)^2 + 4\chi^2 \ln \chi [-2 + (1 + \nu) \ln \chi] \right\}$$

$$k_{31} = -\frac{16(-1 + \chi^2)}{r_1^2}$$

$$\begin{aligned}
k_{32} &= \frac{8(-1 + \chi^2 - 2\chi^2 \ln \chi)}{r_1} \\
k_{33} &= \frac{16(-1 + \chi^2)}{r_1^2} \\
k_{41} &= \frac{8\chi(-1 + \chi^2 - 2\ln \chi)}{r_1} \\
k_{42} &= 8\chi [1 - \chi^2 + (1 + \chi^2) \ln \chi] \\
k_{43} &= -\frac{8\chi(-1 + \chi^2 - 2\ln \chi)}{r_1} \\
k_{44} &= 2 \left\{ (-1 + \chi^2) [1 - \nu + (3 + \nu)\chi^2] - 4\chi^2 \ln \chi [2 + (1 + \nu) \ln \chi] \right\}
\end{aligned}$$

- Matriz de rigidez referente ao efeito de flexão (elemento de fechamento):

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$[K_f] = \pi D \begin{bmatrix} \frac{16}{r_2^2} & & \text{sim.} \\ -\frac{16}{r_2^2} & \frac{16}{r_2^2} & \\ \frac{8}{r_2} & -\frac{8}{r_2} & 2(3 + \nu) \end{bmatrix}$$

- Matriz de massa referente ao efeito de flexão (elemento anular):

$$[M] = [\gamma] [m] [\gamma]^T$$

$$[m] = \rho t_p \pi r_1^2 \begin{bmatrix} m_{11} & & & \text{sim.} \\ m_{21} & m_{22} & & \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
m_{11} &= (-1 + \chi^2) \\
m_{21} &= \frac{1}{2} (-1 + \chi^4) \\
m_{22} &= \frac{1}{3} (-1 + \chi^6) \\
m_{31} &= \frac{1}{2} (1 - \chi^2 + 2\chi^2 \ln \chi) \\
m_{32} &= \frac{1}{8} (1 - \chi^4 + 4\chi^4 \ln \chi) \\
m_{33} &= \frac{1}{2} [-1 + \chi^2 + 2\chi^2 (-1 + \ln \chi) \ln \chi] \\
m_{41} &= \frac{1}{8} (1 - \chi^4 + 4\chi^4 \ln \chi) \\
m_{42} &= \frac{1}{18} (1 - \chi^6 + 6\chi^6 \ln \chi) \\
m_{43} &= \frac{1}{16} [-1 + \chi^4 + 4\chi^4 \ln \chi (-1 + 2\ln \chi)]
\end{aligned}$$

$$m_{44} = \frac{1}{54} \left[-1 + \chi^6 + 6\chi^6 \ln \chi (-1 + 3 \ln \chi) \right]$$

- Matriz de massa referente ao efeito de flexão (elemento de fechamento):

$$[M_f] = \rho t_p \pi r_2^2 \begin{bmatrix} \frac{7}{54} & & \text{sim.} \\ \frac{17}{108} & \frac{17}{27} & \\ -\frac{7}{216} r_2 & -\frac{1}{54} r_2 & \frac{1}{54} r_2^2 \end{bmatrix}$$

- Vetor de carga equivalente referente ao efeito de flexão (elemento anular):

$$\{F\} = q_w [\gamma] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi (-r_1^2 + r_2^2)}{2r_1^2} \\ \frac{\pi (-r_1^4 + r_2^4)}{8r_1^2} \\ \frac{1}{2} \pi (r_1^2 - r_2^2 + 2r_2^2 \ln \chi) \\ \frac{\pi (r_1^4 - r_2^4 + 4r_2^4 \ln \chi)}{8r_1^2} \end{array} \right\}$$

- Vetor de carga equivalente referente ao efeito de flexão (elemento de fechamento):

$$\{F_f\} = q_w \pi r_2^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{4}{8} r_2 \\ -\frac{r_2}{8} \end{array} \right\}$$

A seguir, apresenta-se as matrizes e vetores referentes ao efeito de flexão em conjunto com o efeito de membrana de placa circular. Unindo-se as matrizes referentes aos dois efeitos (membrana e flexão) é possível se chegar a uma única matriz abrangendo todos os graus de liberdade do elemento finito de placa circular.

- Matriz de rigidez de elemento de placa circular referente ao efeito de flexão e de membrana em conjunto (elemento anular):

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1 - \nu^2)}$$

$$\chi = \frac{r_2}{r_1}$$

$$\tau = (\chi^2 - 1)^2 - 4\chi^2 \ln^2 \chi$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \text{sim.} \\ K_{21} & K_{22} & & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & & & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & & \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{E}{(\nu^2 - 1)} \frac{2\pi}{(r_1^2 - r_2^2)} [r_1^2(\nu + 1) - r_2^2(\nu - 1)] \\
K_{21} &= 0 \\
K_{22} &= \frac{\pi D}{\tau} \frac{16(-1 + \chi^2)}{r_1^2} \\
K_{31} &= 0 \\
K_{32} &= \frac{\pi D}{\tau} \frac{8(1 - \chi^2 + 2\chi^2 \ln \chi)}{r_1} \\
K_{33} &= 2 \frac{\pi D}{\tau} \left\{ -3 + 2\chi^2 + \chi^4 - \nu(-1 + \chi^2)^2 + 4\chi^2 \ln \chi [-2 + (1 + \nu) \ln \chi] \right\} \\
K_{41} &= \frac{E}{(\nu^2 - 1)} \frac{2\pi}{(r_1^2 - r_2^2)} (-2r_1 r_2) \\
K_{42} &= 0 \\
K_{43} &= 0 \\
K_{44} &= \frac{E}{(\nu^2 - 1)} \frac{2\pi}{(r_1^2 - r_2^2)} [r_2^2(\nu + 1) - r_1^2(\nu - 1)] \\
K_{51} &= 0 \\
K_{52} &= -\frac{\pi D}{\tau} \frac{16(-1 + \chi^2)}{r_1^2} \\
K_{53} &= \frac{\pi D}{\tau} \frac{8(-1 + \chi^2 - 2\chi^2 \ln \chi)}{r_1} \\
K_{54} &= 0 \\
K_{55} &= \frac{\pi D}{\tau} \frac{16(-1 + \chi^2)}{r_1^2} \\
K_{61} &= 0 \\
K_{62} &= \frac{\pi D}{\tau} \frac{8\chi(-1 + \chi^2 - 2\ln \chi)}{r_1} \\
K_{63} &= \frac{\pi D}{\tau} 8\chi [1 - \chi^2 + (1 + \chi^2) \ln \chi] \\
K_{64} &= 0 \\
K_{65} &= -\frac{\pi D}{\tau} \frac{8\chi(-1 + \chi^2 - 2\ln \chi)}{r_1} \\
K_{66} &= 2 \frac{\pi D}{\tau} \left\{ (-1 + \chi^2) [1 - \nu + (3 + \nu)\chi^2] - 4\chi^2 \ln \chi [2 + (1 + \nu) \ln \chi] \right\}
\end{aligned}$$

O sistema linear, na forma matricial, referente ao elemento anular contemplando todos os graus de liberdade é dado por:

$$\{F\} = [K] \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ K_{21} & K_{22} & & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & & & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & & \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

- Matriz de rigidez de elemento de placa circular referente ao efeito de flexão e de membrana em conjunto (elemento de fechamento):

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[K_f] = \begin{bmatrix} -2\pi \frac{E}{\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{r_2^2} \pi D & -\frac{16}{r_2^2} \pi D & \frac{8}{r_2} \pi D \\ 0 & -\frac{16}{r_2^2} \pi D & \frac{16}{r_2^2} \pi D & -\frac{8}{r_2} \pi D \\ 0 & \frac{8}{r_2} \pi D & -\frac{8}{r_2} \pi D & 2\pi D(3+\nu) \end{bmatrix}$$

O sistema linear, na forma matricial, referente ao elemento de fechamento contemplando todos os graus de liberdade é dado por:

$$\{F\} = [K_f] \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\pi \frac{E}{\nu-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{r_2^2} \pi D & -\frac{16}{r_2^2} \pi D & \frac{8}{r_2} \pi D \\ 0 & -\frac{16}{r_2^2} \pi D & \frac{16}{r_2^2} \pi D & -\frac{8}{r_2} \pi D \\ 0 & \frac{8}{r_2} \pi D & -\frac{8}{r_2} \pi D & 2\pi D(3+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

O mesmo procedimento que é feito para a matriz de rigidez que engloba os efeitos de flexão e membrana, pode ser usado para se obter a matriz de massa, tanto do elemento anular quanto do elemento de fechamento.

Elemento Finito de Casca Cilíndrica

Apresenta-se aqui as funções de forma e matrizes relativas ao elemento finito de casca cilíndrica

- Funções de forma referentes ao efeito de flexão da casca cilíndrica:

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}$$

- Funções de forma referentes ao efeito de barra da casca cilíndrica:

$$N_6(x) = \frac{l-x}{l}$$

$$N_7(x) = \frac{x}{l}$$

- Matriz de rigidez relativa ao efeito de flexão:

As condições de contorno essenciais (ou condições de contorno de Dirichlet) são: $w(0) = w_1$, $w(l) = w_2$, $\frac{dw(0)}{dx} = \theta_1$ e $\frac{dw(l)}{dx} = \theta_2$. As condições de contorno naturais (ou condições de contorno de Neumann) são: $-D \frac{d^3w(0)}{dx^3} = V_1$, $-D \frac{d^3w(l)}{dx^3} = V_2$, $-D \frac{d^2w(0)}{dx^2} = M_1$ e $-D \frac{d^2w(l)}{dx^2} = M_2$.

$$\int_0^l \left(D \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{Et_c}{a^2} w \right) \delta w dx = 0$$

$$\int_0^l \left(D \frac{d^4w}{dx^4} \delta w + \frac{Et_c}{a^2} w \delta w \right) dx = 0$$

$$\int_0^l D \frac{d^4w}{dx^4} \delta w + \int_0^l \frac{Et_c}{a^2} w \delta w dx = 0$$

integrando por partes duas vezes:

$$\int_0^l D \frac{d^4w}{dx^4} \delta w = D \left[\frac{d^3w}{dx^3} \delta w \right]_0^l - \int_0^l D \frac{d^3w}{dx^3} \frac{d\delta w}{dx} dx$$

$$D \left[\frac{d^3w}{dx^3} \delta w \right]_0^l - \int_0^l D \frac{d^3w}{dx^3} \frac{d\delta w}{dx} dx + \int_0^l \frac{Et_c}{a^2} w \delta w dx = 0$$

$$\int_0^l D \frac{d^3w}{dx^3} \frac{d\delta w}{dx} dx = D \left[\frac{d^2w}{dx^2} \frac{d\delta w}{dx} \right]_0^l - \int_0^l D \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} dx$$

$$D \left[\frac{d^3w}{dx^3} \delta w \right]_0^l - D \left[\frac{d^2w}{dx^2} \frac{d\delta w}{dx} \right]_0^l + \int_0^l D \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} dx + \int_0^l \frac{Et_c}{a^2} w \delta w dx = 0$$

$$D \left[\frac{d^3w(l)}{dx^3} \delta w(l) - \frac{d^3w(0)}{dx^3} \delta w(0) + \frac{d^2w(0)}{dx^2} \frac{d\delta w(0)}{dx} - \frac{d^2w(l)}{dx^2} \frac{d\delta w(l)}{dx} + \int_0^l \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} dx \right] +$$

$$+ \int_0^l \frac{Et_c}{a^2} w \delta w dx = 0$$

aplicando-se as condições de contorno:

$$-V(l) \delta w(l) + V(0) \delta w(0) - M(0) \frac{d\delta w(0)}{dx} + M(l) \frac{d\delta w(l)}{dx} + D \int_0^l \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2\delta w}{dx^2} dx +$$

$$+ \int_0^l \frac{Et_c}{a^2} w \delta w dx = 0$$

substituindo pelas funções de forma:

$$k_{ij} = D \int_0^l \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx + \frac{Et_c}{a^2} \int_0^l N_i N_j dx - V(l) N_i(l) + V(0) N_i(0) - \\ - M(0) \frac{dN_i(0)}{dx} + M(l) \frac{dN_i(l)}{dx}$$

a matriz de rigidez referente à flexão é dada por:

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[K] = D \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} + \frac{Et_c}{a^2} \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ \frac{210}{11l^2} & \frac{105}{13l^2} & \frac{420}{13l} & -\frac{140}{11l^2} \\ \frac{70}{13l^2} & \frac{420}{l^3} & \frac{35}{11l^2} & -\frac{210}{l^3} \\ -\frac{420}{13l^2} & -\frac{140}{140} & -\frac{210}{210} & \frac{105}{105} \end{bmatrix}$$

- Matriz de massa relativa ao efeito de flexão:

$$[M] = 2\pi a t_p \rho \begin{bmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ \frac{210}{11l^2} & \frac{105}{13l^2} & \frac{420}{13l} & -\frac{140}{11l^2} \\ \frac{70}{13l^2} & \frac{420}{l^3} & \frac{35}{11l^2} & -\frac{210}{l^3} \\ -\frac{420}{13l^2} & -\frac{140}{140} & -\frac{210}{210} & \frac{105}{105} \end{bmatrix}$$

- Vetor de carga equivalente relativo ao efeito de flexão:

$$\{F\} = q_w \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{bmatrix}$$

- Matriz de rigidez relativa ao efeito de barra:

$$[K] = \frac{2\pi E a t_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de massa relativa ao efeito de barra:

$$[M] = 2\pi a t_p \rho \begin{bmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{bmatrix}$$

- Vetor de carga equivalente relativo ao efeito de barra:

$$\{F\} = q_u \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{Bmatrix}$$

- Matriz de rigidez relativa ao efeito de flexão em conjunto do efeito de barra:

$$D = \frac{Et_p^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ K_{21} & K_{22} & & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & & & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & & \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \quad \text{sim.}$$

onde

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{2\pi E a t_p}{l}, K_{21} = 0, \\ K_{22} &= \frac{12D}{l^3} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{13l}{35}, K_{31} = 0, \\ K_{32} &= \frac{6D}{l^2} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{11l^2}{210}, K_{33} = \frac{4D}{l} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{l^3}{105}, \\ K_{41} &= -\frac{2\pi E a t_p}{l}, K_{42} = 0, \\ K_{43} &= 0, K_{44} = \frac{2\pi E a t_p}{l}, \\ K_{51} &= 0, K_{52} = -\frac{12D}{l^3} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{9l}{70}, \\ K_{53} &= -\frac{6D}{l^2} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{13l^2}{420}, K_{54} = 0, \\ K_{55} &= \frac{12D}{l^3} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{13l}{35}, K_{61} = 0, \\ K_{62} &= \frac{6D}{l^2} - \frac{Et_c}{a^2} \frac{13l^2}{420}, K_{63} = \frac{2D}{l} - \frac{Et_c}{a^2} \frac{l^3}{140}, \\ K_{64} &= 0, K_{65} = -\frac{6D}{l^2} - \frac{Et_c}{a^2} \frac{11l^2}{210}, \\ K_{66} &= \frac{4D}{l} + \frac{Et_c}{a^2} \frac{l^3}{105}, \end{aligned}$$

O sistema linear, na forma matricial, referente ao elemento de casca cilíndrica contemplando todos os graus de liberdade é dado por:

$$\{F\} = [K] \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ H_2 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ K_{21} & K_{22} & & & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & & & \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & & \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

- Matriz de massa relativa ao efeito de flexão em conjunto do efeito de barra:

$$[M] = 2\pi a t_p \rho \begin{bmatrix} M_{11} & & & & & \\ M_{21} & M_{22} & & & & \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & & & \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & & \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{l}{3}, M_{21} = 0, M_{22} = \frac{13l}{35} \\ M_{31} &= 0, M_{32} = \frac{11l^2}{210}, M_{33} = \frac{l^3}{105} \\ M_{41} &= \frac{l}{6}, M_{42} = 0, M_{43} = 0 \\ M_{44} &= \frac{l}{3}, M_{51} = 0, M_{52} = \frac{9l}{70} \\ M_{53} &= \frac{13l^2}{420}, M_{54} = 0, M_{55} = \frac{13l}{35} \\ M_{61} &= 0, M_{62} = -\frac{13l^2}{420}, M_{63} = -\frac{l^3}{140} \\ M_{64} &= 0, M_{65} = -\frac{11l^2}{210}, M_{66} = \frac{l^3}{105} \end{aligned}$$

APÊNDICE B – Montagem das Matrizes A e D

Apresenta-se neste apêndice, através de um exemplo simplificado de um poço, como se dá o preenchimento das matrizes de transferência $[A]$ e $[D]$. Para isso, modela-se um poço com 2 elementos na base e 2 elementos na parede, a numeração dos nós, dos elementos e os graus de liberdade são ilustrados na figura 49. Todos os elementos, tanto da base quanto da parede, têm o mesmo comprimento. Cada nó tem 3 graus de liberdade, 1 deslocamento radial, 1 deslocamento vertical e 1 rotação, exceto o nó central que apresenta apenas 1 deslocamento vertical.

Sabe-se que a matriz $[A]$ e $[D]$ são obtidas a partir das funções de forma do elemento finito da modelagem. A matriz $[A]$ está relacionada a cargas equivalentes nodais devido a um carregamento uniformemente distribuído unitário como ilustra a figura 50 para o caso de um elemento anular de placa circular. Os vetores envolvidos na montagem da matriz $[A]$ são encontrados no apêndice A.

Para 1 elemento de placa circular com um carregamento distribuído unitário transversal ao elemento, têm-se os seguintes vetores para o caso do elemento anular e do elemento de fechamento respectivamente:

$$\left\{ F_{base}^{(trans)} \right\} = \begin{Bmatrix} F_{base}^{(trans)}(1,1) \\ F_{base}^{(trans)}(2,1) \\ F_{base}^{(trans)}(3,1) \\ F_{base}^{(trans)}(4,1) \end{Bmatrix} = [\gamma] \begin{Bmatrix} \frac{\pi(-r_1^2 + r_2^2)}{\pi(-r_1^4 + r_2^4)} \\ \frac{2r_1^2}{\frac{1}{2}\pi(r_1^2 - r_2^2 + 2r_2^2 \ln \chi)} \\ \frac{\pi(r_1^4 - r_2^4 + 4r_2^4 \ln \chi)}{8r_1^2} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ F_{f,base}^{(trans)} \right\} = \begin{Bmatrix} F_{f,base}^{(trans)}(1,1) \\ F_{f,base}^{(trans)}(2,1) \\ F_{f,base}^{(trans)}(3,1) \end{Bmatrix} = \pi r_2^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{r_2}{8} \end{Bmatrix}$$

Para 1 elemento de placa circular com um carregamento distribuído unitário axial ao elemento, têm-se os seguintes vetores para o caso do elemento anular e do elemento de fechamento respectivamente:

$$\left\{ F_{base}^{(axial)} \right\} = \begin{Bmatrix} F_{base}^{(axial)}(1,1) \\ F_{base}^{(axial)}(2,1) \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \frac{\pi}{(r_1 + r_2)} \begin{Bmatrix} -r_1(r_1 - r_2)(r_1 - 2r_2) \\ r_2(r_2 - r_1)(r_2 - 2r_1) \end{Bmatrix}$$

modelo unidimensional axissimétrico

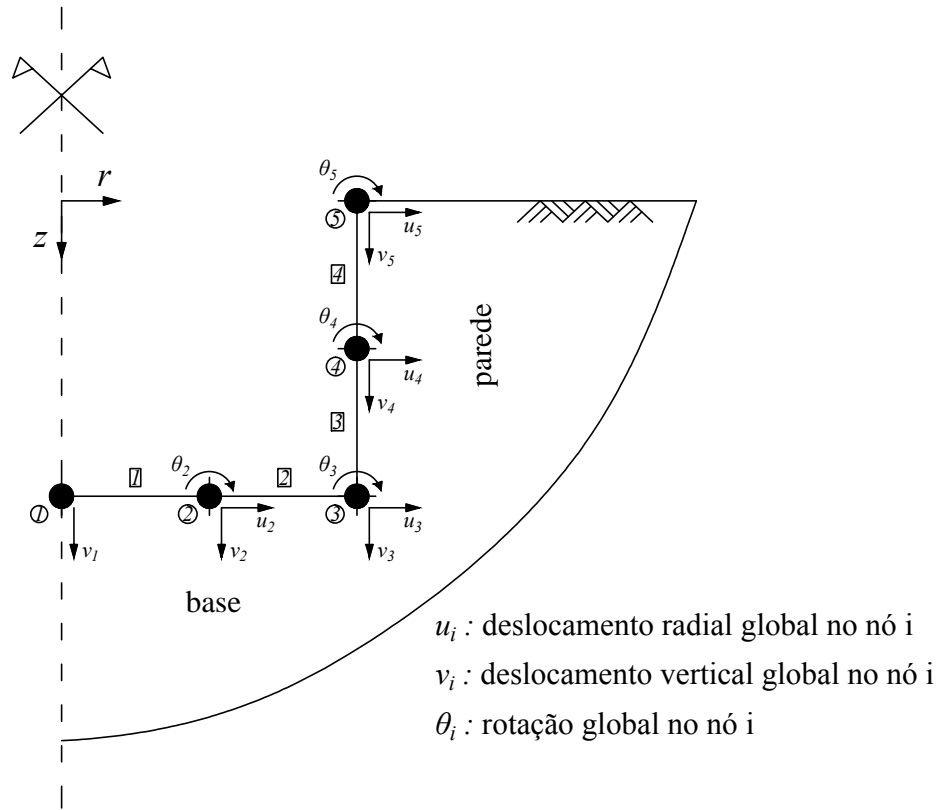


Figura 49 – Exemplo de poço para a montagem das matrizes $[A]$ e $[D]$: nós, elementos e graus de liberdade

$$\{F_{f,base}^{(axial)}\} = \frac{2}{3}\pi r_2^2$$

Para 1 elemento de casca cilíndrica com um carregamento distribuído unitário transversal ao elemento, têm-se o seguinte vetor:

$$\{F_{parede}^{(trans)}\} = \begin{Bmatrix} F_{parede}^{(trans)}(1,1) \\ F_{parede}^{(trans)}(2,1) \\ F_{parede}^{(trans)}(3,1) \\ F_{parede}^{(trans)}(4,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l^2}{12} \\ \frac{l}{2} \\ -\frac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Para 1 elemento de casca cilíndrica com um carregamento distribuído unitário axial ao elemento, têm-se o seguinte vetor:

$$\{F_{parede}^{(axial)}\} = \begin{Bmatrix} F_{parede}^{(axial)}(1,1) \\ F_{parede}^{(axial)}(2,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} \end{Bmatrix}$$

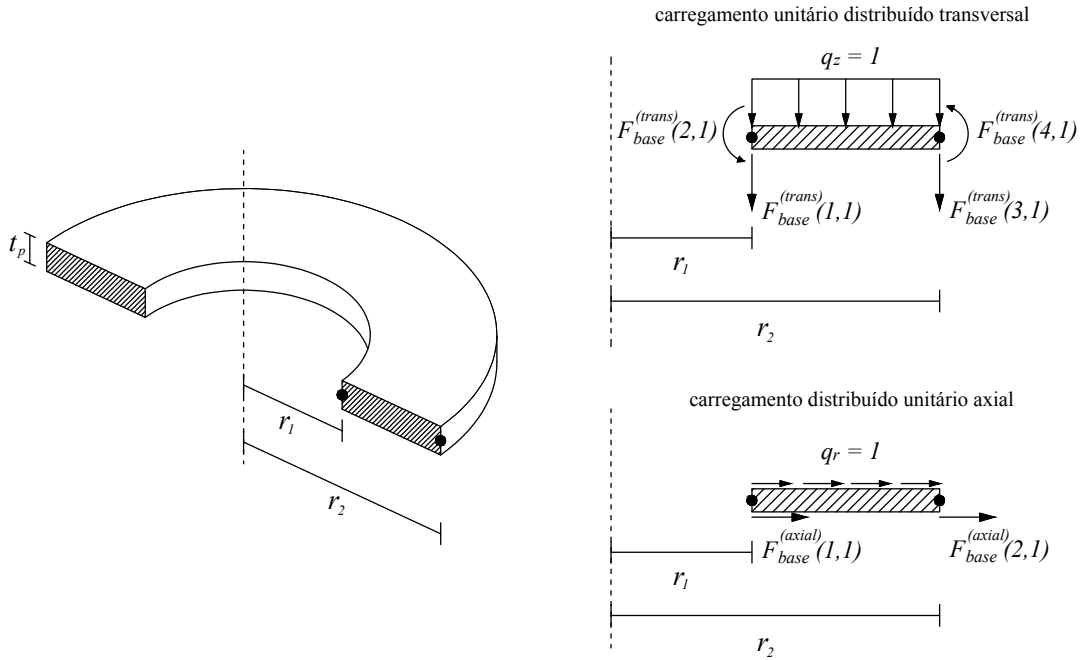


Figura 50 – Diretrizes para o preenchimento da matriz $[A]$ referentes ao elemento anular (placa circular) da base

A matriz $[A]$, para o caso do poço, tem tamanho $3n_{nb} + 3n_{np} - 5 \times 2n_e$, onde n_{nb} é o número de nós da base, n_{np} é o número de nós da parede. Portanto a matriz $[A]$ (ver tabela 7) é montada por colunas, com cada coluna correspondendo a uma direção (axial ou transversal) relativa ao elemento e preenchida nas posições correspondentes aos nós presentes no elemento com as cargas nodais equivalentes a uma carga normal unitária uniforme aplicada ao elemento.

Um procedimento similar pode ser feito para se encontrar a matriz $[D]$ e está relacionada aos deslocamentos e rotações nodais do elemento correspondente. A matriz $[D]$ multiplicada pelos deslocamentos axiais e transversais ao elemento em seu centro geométrico, gera os deslocamentos e rotações unitárias nos nós do elemento. Portanto, para se saber a influência dos deslocamentos e rotações nodais no centro do elemento de placa circular e no centro do elemento de casca cilíndrica, basta utilizar as funções de formas. Assim, substituindo-se o valor do centro do elemento nas funções de forma, obtêm-se a relação entre o nó central do elemento e os nós extremos. Logo para o elemento de placa circular (figura 51), no caso do efeito da flexão, tem-se:

$$w\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)w_1 + \varphi_2\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\theta_1 + \varphi_3\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)w_2 + \varphi_4\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\theta_2$$

onde $w\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)$ é o deslocamento transversal no nó central, φ_1 , φ_2 , φ_3 e φ_4 , são as funções

Tabela 7 – Matriz [A]

elem. 1 (axial)	elem. 1 (trans)	elem. 2 (axial)	elem. 2 (trans)	elem. 3 (trans)	elem. 3 (axial)	elem. 4 (trans)	elem. 4 (axial)
0	$F_{f,base}^{(trans)}(1,1)$	0	0	0	0	0	0
$F_{f,base}^{(axial)}$	0	$F_{base}^{(axial)}(1,1)$	0	0	0	0	0
0	$F_{f,base}^{(trans)}(2,1)$	0	$F_{base}^{(trans)}(1,1)$	0	0	0	0
0	$F_{f,base}^{(trans)}(3,1)$	0	$F_{base}^{(trans)}(2,1)$	0	0	0	0
0	0	$F_{base}^{(axial)}(2,1)$	0	$F_{parede}^{(trans)}(1,1)$	0	0	0
0	0	0	$F_{base}^{(trans)}(3,1)$	0	$F_{parede}^{(axial)}(1,1)$	0	0
0	0	0	$F_{base}^{(trans)}(4,1)$	$F_{parede}^{(trans)}(2,1)$	0	0	0
0	0	0	0	$F_{parede}^{(trans)}(3,1)$	0	$F_{parede}^{(trans)}(1,1)$	0
0	0	0	0	0	$F_{parede}^{(axial)}(2,1)$	0	$F_{parede}^{(axial)}(1,1)$
0	0	0	0	$F_{parede}^{(trans)}(4,1)$	0	$F_{parede}^{(trans)}(2,1)$	0
0	0	0	0	0	0	$F_{parede}^{(trans)}(3,1)$	0
0	0	0	0	0	0	0	$F_{parede}^{(axial)}(2,1)$
0	0	0	0	0	0	$F_{parede}^{(trans)}(4,1)$	0

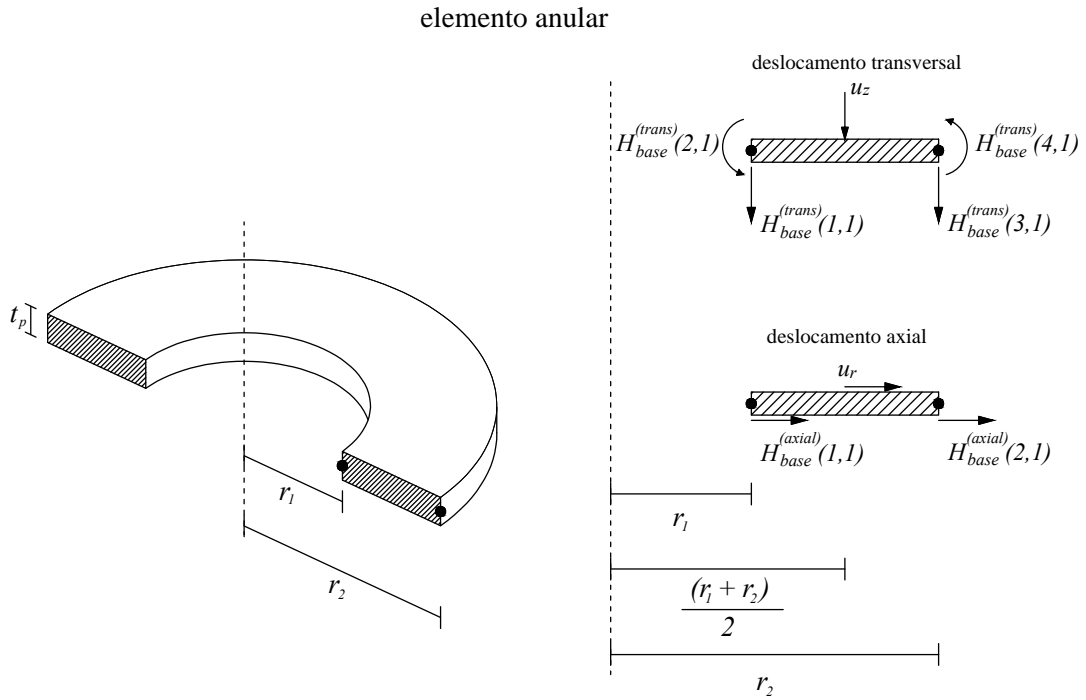


Figura 51 – Diretrizes para o preenchimento da matriz $[D]$ referentes ao elemento anular (placa circular) da base

de forma apresentadas no apêndice A, $\frac{r_1 + r_2}{2}$ é a posição do nó central e w_1 , θ_1 , w_2 e θ_2 são os graus de liberdade. Para o caso do efeito de membrana na placa circular, tem-se:

$$u\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = N_1\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)u_1 + N_2\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)u_2$$

onde $u\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)$ é o deslocamento transversal no nó central, N_1 e N_2 são as funções de forma apresentadas no apêndice A, $\frac{r_1 + r_2}{2}$ é a posição do nó central e u_1 e u_2 são os graus de liberdade. Para os casos do elemento de placa circular de fechamento, tem-se para flexão e membrana respectivamente:

$$w\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = \varphi_1\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)w_1 + \varphi_3\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)w_2 + \varphi_4\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\theta_2$$

$$u\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) = N_2\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)u_2$$

Dessa maneira, para o caso de placa circular, quando o elemento é submetido a deslocamento transversal, é possível se obter os seguintes vetores:

$$\left\{ H_{base}^{(trans)} \right\} = \begin{Bmatrix} H_{base}^{(trans)}(1,1) \\ H_{base}^{(trans)}(2,1) \\ H_{base}^{(trans)}(3,1) \\ H_{base}^{(trans)}(4,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \\ \varphi_2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \\ \varphi_3 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \\ \varphi_4 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ H_{f,base}^{(trans)} \right\} = \begin{Bmatrix} H_{base}^{(trans)}(1,1) \\ H_{base}^{(trans)}(2,1) \\ H_{base}^{(trans)}(3,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \\ \varphi_3 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \\ \varphi_4 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \end{Bmatrix}$$

Para o caso de placa circular, quando o elemento é submetido a deslocamento transversal, tem-se:

$$\left\{ H_{base}^{(axial)} \right\} = \begin{Bmatrix} H_{base}^{(axial)}(1,1) \\ H_{base}^{(axial)}(2,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \\ N_2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ H_{f,base}^{(axial)} \right\} = N_2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)$$

Analogamente, pode se aplicar o mesmo processo ao elemento de casca cilíndrica. O centro geométrico do elemento de casca cilíndrica tem o valor $l/2$, logo, para o deslocamento transversal ao elemento, tem-se:

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 \theta_1 + N_3 w_2 + N_4 \theta_2$$

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = N_1 \left(\frac{l}{2}\right) w_1 + N_2 \left(\frac{l}{2}\right) \theta_1 + N_3 \left(\frac{l}{2}\right) w_2 + N_4 \left(\frac{l}{2}\right) \theta_2$$

Para o deslocamento axial ao elemento, tem-se:

$$u(x) = N_1^{(ax)} \left(\frac{l}{2}\right) u_1 + N_2^{(ax)} \left(\frac{l}{2}\right) u_2$$

onde $N_1, N_2, N_3, N_4, N_1^{(ax)}$ e $N_2^{(ax)}$ são funções de forma apresentadas no apêndice A. Os vetores correspondentes ao elemento de casca cilíndrica são:

$$\left\{ H_{parede}^{(trans)} \right\} = \begin{Bmatrix} H_{parede}^{(trans)}(1,1) \\ H_{parede}^{(trans)}(2,1) \\ H_{parede}^{(trans)}(3,1) \\ H_{parede}^{(trans)}(4,1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ H_{parede}^{(axial)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} H_{parede}^{(axial)}(1,1) \\ H_{parede}^{(axial)}(2,1) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N_1^{(ax)} \\ N_2^{(ax)} \end{matrix} \right\}$$

A matriz $[D]$ tem tamanho $2n_e \times (3n_{nb} + 3n_{np} - 5)$, onde n_{nb} é o número de nós da base, n_{np} é o número de nós da parede. A matriz $[D]$ é montada por linhas (ver tabela 8), com cada linha correspondendo a uma direção (axial ou transversal) relativa ao elemento e preenchida nas posições correspondentes aos nós presentes no elemento com as influências dos deslocamentos nodais no deslocamento transversal e axial no centro do elemento.

